UFR Mathématiques | Université Rennes 1
Master 1 / GEA -Géométrie et Algèbre | Automne 2012

# Contrôle terminal

jeudi 20 décembre 2012

La qualité de la rédaction sera un élément important de la notation.

---

**Exercice 1.** *Un parallélogramme est un quadrilatère dont les cotés opposés sont parallèles.*

(1) *Est-il vrai qu'un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si il a un centre de symétrie ?*

(2) *Est-il vrai qu'un quadrilatère convexe ayant deux axes de symétrie sécants est un parallélogramme ?*

**Exercice 2.** *Soient $A$, $B$ et $M$ trois points non alignés du plan affine euclidien $\Pi$. On note $A'$ (resp. $B'$, $M'$) le pied de la hauteur du triangle $ABM$ issue de $A$ (resp. $B$, $M$) et $H_M$ l'orthocentre de ce triangle.*

(1) *Montrez que l'orthocentre de $ABH_M$ est $M$.*

(2) *Montrez que si le quadrilatère $MA'H_MB'$ est croisé alors $\widehat{AMB} \equiv \widehat{AH_MB}$ et que sinon les angles sont supplémentaires.*

*Considérons un cercle $\mathscr{C}$ contenant $A$, $B$ et $M$. On admettra que $MA'H_MB'$ est croisé si et seulement si $M$ et $H_M$ sont de part et d'autre de $(AB)$.*

(3) *Montrez que le symétrique de $H_M$ par rapport à $(AB)$ appartient à $\mathscr{C}$.*

(4) *Le cercle $\mathscr{C}$ et les points $A$ et $B$ sont fixés. Décrivez $\{H_M \in \Pi \mid M \in \mathscr{C} - \{A, B\}\}$.*

**Exercice 3.** *Un polygone $P$ du plan affine euclidienne $\Pi$ est régulier si pour tout couple $(S_1, S_2)$ de sommets de $P$, il existe une isométrie de $\Pi$ préservant $P$ et envoyant $S_1$ sur $S_2$.*

*Soit $P = ABCDE$ un pentagone convexe tel que $AC = BD = CE = DA = EB$.*

(1) *Supposons que $P$ soit inscrit dans un cercle de centre $O$. Montrez que $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOD} \equiv \widehat{COE} \equiv \widehat{DOA} \equiv \widehat{EOB}$. Déduisez-en que $P$ est régulier.*

(2) *Supposons que $AB = BC = CD = DE = EA$. Montrez que la médiatrice de $[AB]$ contient $D$ et est aussi la médiatrice de $[CE]$. Déduisez-en une isométrie préservant $P$ envoyant $A$ sur $B$.*

(3) *Supposons que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BCD} \equiv \widehat{CDE} \equiv \widehat{DEA} = \widehat{EAB}$. Montrez que les triangles $ABC$ et $AED$ sont isométriques (= congruents). Déduisez-en de $P$ est régulier.*

**Exercice 4.** *Dans cet exercice, tous les entiers sont des entiers naturels. On se propose de démontrer le théorème de Wilson :*

Si $p$ est un entier premier alors $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

(1) *Vérifiez le théorème de Wilson pour les trois plus petit entiers premiers.*

(2) *On notera* $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *pour* $0 \leq k \leq n$ *et* $0$ *sinon.*

 (a) *Vérifiez que pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout entier* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *on a :*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

 (b) *Déduisez-en que pour tout entier premier* $p$ *et tout entier* $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, $p$ *divise* $\binom{n}{p}$

(3) *Soit* $p$ *un entier premier impair. On considère la fonction* $f$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \prod_{k=1}^{p-1}(x+k)$$

 (a) *Montrez que pour tout réel* $x$ *on a :* $pf(x) = (x+1)f(x+1) - xf(x)$

 (b) *Justifiez l'existence d'un* $p$*-uplet d'entiers* $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ *tel que pour tout réel* $x$ *on ait :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{p-1-k}$$

 (c) *Vérifiez que* $a_0 = 1$ *et* $a_{p-1} = (p-1)!$

 (d) *À l'aide de la question (3.a) et en faisant intervenir le binôme de Newton, montrez que pour tout entier* $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ *on a :*

$$pa_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{p-i}{k+1-i} a_i$$

 (e) *Déduisez-en que* $a_1 = \binom{p}{2}$ *et que pour tout entier* $k \in \{2, p-1\}$ *on a :*

$$ka_k = \binom{p}{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i$$

 (f) *Montrez par récurrence le théorème suivant dû à Lagrange :*

Si $p$ est un entier premier impair et si $f(x) = \prod_{k=1}^{p-1}(x+k) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{p-1-k}$ alors les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ sont divisibles par $p$.

(4) *Soit* $p$ *un entier premier impair.*

 (a) *Montrez que :*

$$p! = 1 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + (p-1)!$$

 (b) *Déduisez-en que* $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

(5) *Montrez que la réciproque du théorème de Wilson est vraie.*

Donner le plan d'étude d'une courbe paramétrée de plan ou de l'espace (domaine, symmétries, variations, convexité, point stationnaires, etc.). Puis étudier les trois courbes suivantes :

(1) la cycloïde $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$,
(2) la cardioïde $t \mapsto ((1 + \cos t)\cos t, (1 + \cos t)\sin t)$,
(3) le folium de Descarte $t \mapsto (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$.

## PROGRAMME DU SECOND SEMESTRE

**Semaines 2 & 4** Courbes paramétrées + Cours sur les courbes de Bézier jeudi 10 à 14:00.

**Semaines 5 & 6** Nombres complexes

**Semaines 7 & 8** Nombres complexes et géométrie

**Contrôle continu** le jeudi 21 mars, 8h-10h.
**Semaine 10** correction & compléments

**Semaines 11 & 12** Diagonalisation des endomorphismes et des formes quadratiques

**Semaines 13 & 14** Coniques

## UNE CORRECTION DE L'EXAMEN

**Exercice 1.**

(1) Non, le quadrilatère croisé construit à partir des sommets d'un parallélogramme $ABCD$ admet comme centre de symétrie le point d'intersection de $(AC)$ et $(BD)$.

(2) Soient $ABCD$ un tel quadrilatère, $\sigma_1$ et $\sigma_2$ les deux symétries. La composée de deux symétrie est une rotation $r$ de centre $O$ l'intersection des deux axes de symétries et de d'angle $\alpha$ le double de l'angle formée par les deux axes. Cette rotation est d'ordre 4 ou 2. En remplacant $r$ par $r \circ r$ s'il le faut, nous obenons une symétrie centrale préservant $ABCD$. L'image de $A$ ne peut etre un sommet adjacent car le quadrilatère serait dans un demi-plan délimité par la droite passant par ces deux sommets mais ce demi-plan n'est pas stable par la symétrie centrale. L'image de $A$ est donc $C$ et celle de $B$ est $D$. On a donc $\vec{AB} = -\vec{CD}$ et $ABCD$ est un parallélogramme.

**Exercice 2.**

(1) Par définition $(AM)$ est orthogonale à $(BH_M)$ ainsi $M$ appartient à la hauteur de $ABH_M$ issue de $A$. Ceci est valable pour la hauteur issue de $B$ et $M$ est bien l'orthocentre de $ABH_M$.

(2) Si le quadrilatère est croisé, notons $C$ le point de croisement. Les triangles $B'CM$ et $A'CH_H$ sont rectangles en $B'$ et $A'$ respectivement et ont leurs angles en $C$ de même ouverture car ils sont opposés par le sommet. On doit donc avoir $\widehat{B'MC} \equiv \widehat{A'H_MC}$ ce qui est l'égalité souhaité. Si le quadrilatère n'est pas croisé alors la somme de ces angles est un angle plein. Comme par ailleurs il a deux angles droits, les deux angles restant sont supplémentaires.

(3) Notons $\sigma$ la symétrie par rapport à $(AB)$. Si $MA'H_MB'$ est croisé alors $M$ et $\sigma(H_M)$ sont du même côté de $(AB)$ et forment des angles de même ouverture avec $A$ et $B$. Le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre assure que $\sigma(H_M) \in \mathscr{C}$. Si $MA'H_MB'$ n'est pas croisé alors $M$ et $\sigma(H_M)$ sont de part et d'autre de $(AB)$ et forment avec $A$ et $B$ des angles supplémentaires. Le même théorème permet d'affirmer que $\sigma(H_M) \in \mathscr{C}$.

(4) La question précédente montre que l'ensemble à déterminé est inclus dans $\sigma(\mathscr{C} - \{A, B\})$. L'égalité est une conséquence directe de la question (1).

**Exercice 3.**

(1) Les triangles $AOC$ et $BOD$ sont isocèles en $O$ et sont isométriques leurs angles en $O$ ont donc même ouverture. Ce même raisonnement sur les autres triangles montre les égalités d'ouvertures souhaités. Puisque $\widehat{AOB} + \widehat{BOD} + \widehat{DOA} \equiv \widehat{BOC} + \widehat{COE} + \widehat{EOB}$ on a $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC}$. Ce même raisonnement donne $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC} \equiv \widehat{COD} \equiv \widehat{DOE} \equiv \widehat{EOA}$. Ainsi la rotation de centre $O$ et d'angle $\widehat{AOB}$ et ces itérées répondent à la question.

(2) Puisque $AD = BD$, $D$ appartient à la médiatrice de $[AB]$. Puisque $CD = ED$, $D$ appartient à la médiatrice de $[CE]$. Les triangles $CBA$ et $EAB$ sont isométriques ainsi $\widehat{CBA} \equiv \widehat{EAB}$. Si $D'$ est le milieu de $[AB]$ alors les triangles $CBD'$ et $EAD'$ ont deux côés de même longueurs formant des angles de même ouvertures. On a donc $ED' = CD'$ et $D'$ appartient à la médiatrice de $[CE]$. Les deux médiatrices ayant deux points communs elles coïncident. Le symétrie par rapport à cette droite répond à la question.

(3) Le triangle ADC est isocèle en $A$, on a donc $\widehat{ADC} \equiv \widehat{ACD}$ et par conséquent $\widehat{ADE} \equiv \widehat{ACB}$. Les triangles $ABC$ et $AED$ ont des angles de même ouvertures et ont un côté de même longueur, ils sont isométriques. On a ainsi montrer que deux côtés adjacent du pentagone ont même longueur. La question (2) nous donne alors une isométrie préservant $P$ et échangeant des sommets adjacents. Cette même symétrie échange aussi des sommets non adjacents. Ainsi le pentagone est régulier.

**Exercice 4.**

Extrait de la seconde épreuve du CAPES 2013-1.