Contrôle continu : mardi 28 février 2012

La qualité de la rédaction sera un élément important de la notation.
Les résultats vus en TD pourront éventuellement être utilisés s'ils sont cités correctement.

Exercice 1. *Soit* Π *un plan identifié au plan complexe par le choix d'un repère orthonormé direct.*

Considérons $ABCD$ *un quadrilatère convexe (non plat) inscrit dans un cercle et* a, b, c, d *les affixes de ses sommets.*

(1) *Montrez que* $\frac{a-b}{a-d}/\frac{c-b}{c-d} \in \mathbb{R}_{<0}$.
(2) *On note* $u = (a-d)(c-b)$ *et* $v = (d-c)(a-b)$. *Montrez que* $|u+v| = |u| + |v|$.
(3) *Montrez que* $AC.BD = AB.CD + BC.AD$.

Si A, B, C *et* D *sont quatre points distincts vérifiant* $AC.BD = AB.CD + BC.AD$, *que pouvez vous dire du quadrilatère* $ABCD$ *?*

Exercice 2. *Soient* F *et* F' *deux points distincts d'un plan* Π. *Deux coniques* $\mathscr{C}_1$ *et* $\mathscr{C}_2$ *ayant chacune pour foyers* F *et* F' *sont dites confocales. Soient* $\mathscr{C}_1$ *et* $\mathscr{C}_2$ *deux coniques d'intersection non vide.*

Montrez que si ces deux coniques sont confocales alors elles sont orthogonales.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. *Soient* E *un espace vectoriel réel et* (e_1, e_2, e_3, e_4) *une base de* E. *On définit l'endomorphisme* $u : E \to E$ *par* $u(e_i) = e_j$ *avec* $j \equiv i + 1 \mod 4$.

(1) *Donnez la matrice de* u *dans la base* (e_1, e_2, e_3, e_4).
(2) *Donnez un polynôme annulateur de* u.
(3) u *est-il diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *? Est-il diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *?*
(4) *Si l'une des réponses est oui, diagonalisez* u.