M1 CAPES Mathématiques

Année 2012-2013

Examen de GEA

Durée : 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones portables non autorisés

Une attention toute particulière sera accordée à la qualité et la rigueur de la rédaction.

Le barème n'est qu'indicatif et peut être soumis à modifications.

Exercice 1 *6 points*

Considérons, dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ d'équations

$$\begin{cases} x(t) & = & \frac{t^3}{1+3t} \\ \\ y(t) & = & \frac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$$

1) Etudier la courbe $\mathcal{C}$ aussi précisément que possible.
2) Dessiner son allure en prenant soin de bien respecter les propriétés établies au 1).

Exercice 2 *10 points*

Considérons, dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé, l'application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, à tout point M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ associe le point M' d'affixe $z' \in \mathbb{C}$ définit par

$$z' = \frac{5}{2}z + \left(\frac{3}{2} + 2i\right)\bar{z} + 2i$$

On désigne par A, B, C les points d'affixes $z_A = 1$, $z_B = -1 + 2i$ et $z_C = 1 - \frac{5}{2}i$.

1) Soient A', B', C' les images respectives des points A, B, C par l'application f.
   a) Donner les affixes des points A', B', C'.
   b) Placer les points A, B, C, A', B', C' sur une figure.
   c) Montrer que les points A', B', C' sont alignés.

Tournez la page SVP

2) Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $z_\Omega = -\frac{1}{2}i$ et de rapport 5.

   a) Soit M un point d'affixe z. Exprimer, en fonction de z, l'affixe z_1 de l'image de M par l'application h.

   b) On note h^{-1} l'application réciproque de h. Caractériser l'application h^{-1} et exprimer, en fonction de z, l'affixe z_2 de l'image du point M d'affixe z par l'application h^{-1}.

   c) Déterminer les affixes des points A_2, B_2, C_2 images respectives des points A', B', C' par l'application h^{-1} et placer ces points sur la figure de la question 1)b).

   d) On note D' la droite $(A'B')$ et D_2 son image par h^{-1}. Caractériser géométriquement D_2. Montrer que l'origine O du repère appartient à D_2.

3) On note p l'application $p = h^{-1} \circ f$. Pour tout point M d'affixe z, on note $M_3 = p(M)$ et z_3 son affixe.

   a) Calculer z_3 en fonction de z et $\bar{z}$.

   b) Déterminer les points du plan invariants par l'application p.

   c) Montrer que le nombre $\dfrac{z_3}{2+i}$ est réel et que le nombre $\dfrac{z - z_3}{2+i}$ est imaginaire pur.

   d) Caractériser géométriquement les applications p et f.

Exercice 3 *4 points*

Soit a un nombre réel. Considérons, dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, la courbe paramétrée d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos t + a\cos(4t) \\ \\ y(t) & = & \sin t + a\sin(4t) \end{array} \right.$$

1) Montrer que les quatre points correspondants aux paramètres $t, t+\frac{\pi}{2}, t+\pi, t+\frac{3\pi}{2}$ sont les sommets d'un carré $\mathcal{Q}$ inscrit dans la courbe.

2) Déterminer le lieu du centre du carré $\mathcal{Q}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

Indication : on pourra introduire les nombres complexes $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Éléments de corrections

Exercice 1

- Variations : le signe de $x'(t)$ est celui de $2t+1$, le signe de $y'(t)$ est celui de $t(3t+2)$.
- En $t=0$, il y a un point stationnaire en $(0,0)$. On a les développements limités suivants en 0 : $x(t)=t^3+o(t^3)$ et $y(t)=3t^2-9t^3+o(t^3)$.
  Ainsi, on a affaire à un point de rebroussement de première espèce, avec tangente verticale en ce point.
- Lorsque t tend vers $\pm\infty$, on a une branche parabolique de direction l'axe des abscisses. Plus précisément, on a une parabole asymptote d'équation $3x-y^2-\frac{y}{3}+\frac{1}{9}=0$.
- Lorsque t tend vers $\frac{-1}{3}$, on pose $t=\frac{-1}{3}+u$ et on a $y(t)+9x(t)=\frac{1}{3}-2u+u\epsilon(u)$ avec $\lim_{u\to 0}\epsilon(u)=0$. Donc, on a une asymptote d'équation $y+9x-\frac{1}{3}=0$. De plus, le signe de $-2u$ donne que la courbe est en-dessous de l'asymptote lorsque t tend vers $\frac{-1}{3}$ par valeurs supérieures et au-dessus de l'asymptote lorsque t tend vers $\frac{-1}{3}$ par valeurs inférieures.

Exercice 2

1) c) Par exemple, on montre que les affixes Z_1 et Z_2 des vecteurs $\overrightarrow{B'A'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont $\mathbb{R}$-proportionnels (ici $Z_1=4Z_2$).

2) a) $z_1+i/2=5(z+i/2)$

   b) $z_2+i/2=1/5(z+i/2)$

   d) On sait que D_2 est une droite parallèle à D comme image de la droite D par une homothétie. Nous avons donc la direction de D_2, pour la caractériser il suffit alors d'en donner un point. Ici on voit que B' a pour image l'origine du repère par l'homothétie considérée. Ainsi D_2 est la droite passant par l'origine du repère et de vecteur directeur $\vec{w}$ d'affixe $2+i$.

3) a) On a $z_3=\frac{1}{2}z+\left(\frac{3}{10}+\frac{2}{5}i\right)\bar{z}$.

   b) On résoud $z_3=z$ sous forme algébrique et on obtient les points $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x-2y=0$. C'est-à-dire l'équation de la droite D_2.

   c) On calcule $z_3(2-i)=z(1-i/2)+\bar{z}(1+i/2)$ qui est de la forme $Z+\bar{Z}$ donc bien réel. De même, on calcule $(z-z_3)(2-i)=z(1-i/2)+\bar{z}(-1-i/2)$ qui est de la forme $Z-\bar{Z}$ donc bien imaginaire pur.

   d) En utilisant c), on déduit que $M_3\in D_2$ et que $\overrightarrow{MM_3}$ est orthogonal à un vecteur directeur de la droite D_2. Donc p est la projection orthogonale sur la droite D_2. Pour avoir f, on compose ensuite par l'homothétie h.

Exercice 3

1) En posant $z(t)=x(t)+iy(t)$, on obtient $z(t)=e^{it}+ae^{4it}$. A t fixé, on considère le changement de repère en déplacant l'origine au point Ω d'affixe ae^{4it}. Alors, dans ce nouveau repère, les affixes des points deviennent $Z=z-ae^{4it}$ et les 4 points considéres ont pour affixes $Z(t)=e^{it}$, $Z(t+\pi/2)=e^{it+\pi/2}$, $Z(t+\pi)=e^{it+\pi}$, $Z(t+3\pi/2)=e^{it+3\pi/2}$; on reconnait bien un carré.
2) Le centre du carré précédent est Ω l'origine du nouveau repère, c'est-à-dire le point d'affixe ae^{4it} dans le repère de départ. Il décrit donc le cercle de centre O et de rayon $|a|$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.