UFR Mathématiques — Université Rennes 1
Master 1 / GEA -Géométrie et Algèbre — Automne 2012

Contrôle continu : mardi 23 octobre 2012

La qualité de la rédaction sera un élément important de la notation.

Dans plusieurs exercices, la notion de partition sera utilisée. On rappelle sa définition.

Définition. *Soient $k \geq 1$ un entier et S un ensemble non vide, on dit que $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ est une partition de S en k parties si :*

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, k\}, S_i \neq \emptyset, \\ \forall (i,j) \in \{1, \dots, k\}^2, i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset, \\ \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} S_i = S. \end{cases}$$

Exercice 1. *Soient p et q deux entiers premiers et t un entier.*

(1) *Montrez que si $t \wedge (pq) = 1$ on a les deux congruences suivantes :*

$$t^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod p \quad ; \quad t^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod q.$$

(2) *Déduisez-en que si $t \wedge (pq) = 1$ alors $t^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod pq$.*

(3) *Montrez que si $n \equiv 1 \mod (p-1)(q-1)$ alors, pour tout entier t, $t^n \equiv t \mod pq$.*

(4) *Montrez que si $a \wedge (p-1)(q-1) = 1$ alors il existe un entier c tel que*

$$ac \equiv 1 \mod (p-1)(q-1).$$

(5) *Déduisez-en l'ensemble des solutions de l'équation $x^a \equiv b \mod pq$ lorsque $a \wedge (p-1)(q-1) = 1$.*

Exercice 2. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on considère un ensemble E de cardinal n. On désigne par $Part_k(E)$ l'ensemble des partitions de E en k parties et par $\left\{ {n \atop k} \right\}$ le cardinal de $Part_k(E)$.*

Par convention on pose pour tout entier $n \geq 1$: $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ et $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$.

(1) *Donnez $\left\{ {4 \atop 2} \right\}$.*

(2) *Pour tout entier $k > n$, montrez que $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$.*

(3) *Soit $e \in E$, en comptant les partitions contenant $\{e\}$ puis les autres, montrez que, pour tout entier $n \geq 1$ on a :*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

(4) *On considère un ensemble E de cardinal n et un ensemble F de cardinal k où n et k sont deux entiers strictement positifs. On se propose de calculer le nombre $S(n,k)$ de surjections de E sur F.*

   (a) *Que vaut $S(n,k)$ lorsque $k > n$?*

   (b) *Que vaut $S(n,n)$?*

(c) *On suppose maintenant que* $k \in \{1, \ldots, n\}$. *Montrer que :*

$$S(n,k) = k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Exercice 3. *On considère un entier* $n \geq 2$ *et un nombre premier* p. *On note* $v_p(n)$ *l'entier* k *tel que* p^k *divise* n *et* p^{k+1} *ne divise pas* n.

Pour tout entier $k \geq 0$, *on considère les sous-ensembles finis* U_k, V_k *et* Ω_k *de* $\mathbb{N}$ *définis par*

$$\begin{aligned} U_k &= \{a \in \{1, \ldots, n\} \mid p^k \text{ divise } a\} \\ V_k &= \{a \in \{1, \ldots, n\} \mid p^k \text{ ne divise pas } a\} \\ \Omega_k &= \{a \in \{1, \ldots, n\} \mid v_p(a) = k\}. \end{aligned}$$

(1) *Donnez le plus petit entier* $k_0 \geq 0$ *tel que* $n < p^{k_0}$.

(2) (a) *Montrez que, pour tout* $k \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$, *l'ensemble* U_{k+1} *est strictement inclus dans* U_k *et que pour* $k \geq k_0$ *on a* $U_k = \emptyset$.

(b) *Montrez que, pour tout* $k \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$, *l'ensemble* V_k *est strictement inclus dans* V_{k+1} *et que pour* $k \geq k_0$ *on a* $V_k = \{1, \ldots, n\}$.

(c) *Montrez que la famille de parties* $\{\Omega_0, \ldots, \Omega_{k_0-1}\}$ *forme une partition de l'ensemble* $\{1, \ldots, n\}$.

(3) (a) *Pour tout* $k \geq 0$, *montrez que que* $\Omega_k = U_k \cap V_{k+1}$.

(b) *Calculez, pour tout* $k \geq 0$, $\#U_k$ *et* $\#V_k$ *puis* $\#\Omega_k$ *en fonction de* n *et* p.

(4) *Montrez que* $v_p(n!) = \sum_{k \geq 0} k(\#\Omega_k)$ *et déduisez-en que*

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right].$$