Quelques résultats sur la fonction Γ

Sur le nombre γ

1. Montrer que la suite $\left((1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})-\ln(n)\right)_n$ converge vers un nombre que nous nommerons γ.
2. En déduire que $e^{-\gamma}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-1/n}$.

Sur la fonction Γ

On définit la fonction Γ par la formule

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$$

3. Montrer que cette formule est bien définie dès que $\Re\mathrm{e}(z)>0$.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $\Gamma_n^2(z)=\int_1^n t^{z-1}e^{-t}dt$ définit une fonction entière et que cette suite converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. La limite sera notée Γ^2.
5. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $\Gamma_n^1(z)=\int_{\frac{1}{n}}^1 t^{z-1}e^{-t}dt$ définit une fonction entière et que cette suite converge uniformément sur tout compact de $\{\Re\mathrm{e}>0\}$. La limite sera notée Γ^1.
6. En développant e^{-t}, montrez que $\Gamma^1(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$.
7. En déduire que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont on précisera les pôles, leurs ordres et leurs résidus.
8. Vérifier que Γ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$(*)\qquad \Gamma(z+1)=z\Gamma(z).$$

Nous allons montrer la caractérisation suivante :

Proposition. (Wielandt (1939))
Soient V la bande verticale $\{1\leqslant\Re\mathrm{e}<2\}$ et D un domaine contenant V. Si $f:D\to\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe vérifiant :

(a) $f(z+1)=zf(z)$ lorsque z et $z+1$ sont dans D,

(b) f est bornée sur V,

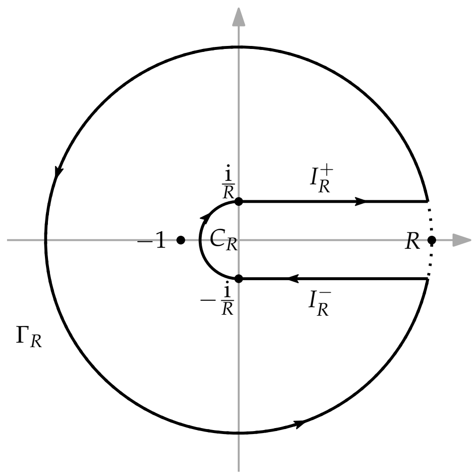
(c) $f(1)=1$,

alors $f=\Gamma|_D$.

9. Montrer que Γ est bornée sur toute bande verticale $\{a\leqslant\Re\mathrm{e}<b\}\subset\{\Re\mathrm{e}>0\}$.
10. Montrer que pour tout entier n, $z\mapsto\frac{f(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)}$ prolonge f en une fonction méromorphe sur $\{\Re\mathrm{e}>-n-1\}$.
11. Montrez que $h(z)=\Gamma(z)-f(z)$ est une fonction entière et vérifie l'équation fonctionnelle $(*)$.
12. En différenciant les cas $|z|>1$ et $|z|\leqslant 1$, montrer que h est bornée sur $\{0\leqslant\Re\mathrm{e}<1\}$.
13. Montrer que $H(z)=h(z)h(1-z)$ vérifie $H(z+1)=-H(z)$. En déduire que H est bornée.
14. Conclure.

La formule des compléments, Euler 1749

15. Montrer que pour $z>0$ et $1-z>0$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^{+\infty}\frac{s^{-z}}{1+s}ds$.
16. Calculer cette intégrale en choisissant une détermination adéquat de $s\mapsto s^z$ et en intégrant sur le contour ci-dessous



17. En déduire la formule des compléments : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Formule du produit d'Euler (1749) et de Gauss (1811)

18. Le produit $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)$ converge-t-il ? et le produit $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$?
19. Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on définit G_n par

$$G_n(z) = \frac{n^{-z}}{n!} z(z+1)\dots(z+n).$$

Montrer que cette suite converge vers une fonction entière G dont vous donnerez les zéros et leurs ordres.

20. En utilisant la proposition de Wielandt, montrer la représentation en produit d'Euler

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}.$$

Les formules de duplication de Legendre et de multiplication de Gauss

21. Montre que $\forall z \in \mathbb{C}$

$$(**) \qquad \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z).$$

22. Soit p un entier supérieur à 2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\prod_{i=0}^{p-1}\Gamma\left(\frac{z+i}{p}\right) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{\frac{1}{2}-z}\Gamma(z).$$

Caracterisation de Γ par la formule de duplication.

23. Soit g une fonction entière, 1-périodique telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $g(2z) = g(z)g(z+\frac{1}{2})$ et pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$. Alors il existe deux constantes a et b telles que $g(z) = ae^{bz}$.
24. Montrer que si une fonction méromorphe vérifie $(*)$, $(**)$ et est strictement positive sur $]0, +\infty[$ alors cette fonction est Γ.

Transcendance différentielle de la fonction Γ

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème(Holder, 1887)
*Q*uelque soit $n \in \mathbb{N}$, il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X, Y_0, Y_1, \ldots, Y_n]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$P\Big(z, \Gamma(z), \Gamma'(z), \ldots, \Gamma^{(n)}(z)\Big) = 0$$

Nous noterons $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ l'anneau $\mathbb{C}[X, Y_0, \ldots Y_n, \ldots]$ des équations différentielles algébriques et I l'ensemble des équations s'annullant sur Γ.

25. Montrer qu'il existe une unique dérivation D de $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ vérifiant $D(X) = 1$ et $D(Y_n) = Y_{n+1}$.
(Rappel : une dérivation d'un anneau est une application $\mathbb{C}$-linéaire vérifiant la règle de Leibniz : $D(PQ) = D(P)Q + PD(Q)$.)
26. Montrer que I est un idéal différentiel *i.e.* idéal stable par D.
27. Montrer que si $P \in I$ alors

$$Q = P(X+1, XY_0, XY_1 + Y_0, XY_2 + 2Y_1, \ldots, XY_n + nY_{n-1}) \in I.$$

Nous ordonnons les variables $X < Y_0 < Y_1 < \ldots < Y_n < \ldots$ et considérons l'ordre lexicographique sur les monômes.

28. Montrer que si I n'est pas réduit à 0 alors il existe un $P \in I$ dont le plus grand monôme est minimal parmi les plus grands monômes d'élements de I.
29. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $Q = X^N P$.
30. En déduire $P(1, 0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \equiv 0$ puis par induction que $\forall m \in \mathbb{N}$, $P(m, 0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \equiv 0$.
31. Montrer que P est divisible par Y_0 et conclure.

Pour une preuve analytique de ce dernier théorème utilisant la théorie de Nevanlinna vous pouvez regarder

[1] S. Bank & R. Kaufman *An extension of Holder's theorem concerning the Gamma function* Funkcialaj Ekvacioj **19** (1976)

Pour une preuve de ce même théorème utilisant la théorie de Galois différentielle

[2] C. Hardouin & M.F. Singer *Differential Galois Theory of Linear Difference Equations* Math. Annalen **342** (2008)