

## Principe de réflexion de Schwarz

### Exercice [inversion]

On définit les inversions de la sphère de Riemann de la manière suivante.

- Pour un cercle  $\mathcal{C}(z_0, r)$  de centre  $z_0 \in \mathbf{C}$  et de rayon  $r > 0$ , on note  $i_{\mathcal{C}} : \hat{\mathbf{C}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$  l'involution telle que  $\arg(z - z_0) \equiv \arg(i_{\mathcal{C}}(z) - z_0)$  et  $|z - z_0||i_{\mathcal{C}}(z) - z_0| = r^2$  complétée par  $i_{\mathcal{C}}(z_0) = \infty$ .
- Pour une droite  $d$ ,  $i_d$  sera la réflexion d'axe  $d$ .

1. Dans chacun des cas ci-dessus, donner une formule pour l'inversion de  $z$  en fonction de  $z$  et  $\bar{z}$ .

Commençons par traiter le cas de l'inversion par rapport à un cercle. Puisque  $\arg(i_{\mathcal{C}}(z) - z_0) \equiv \arg(z - z_0)$  et  $|i_{\mathcal{C}}(z) - z_0| = \frac{r^2}{|z - z_0|}$ , nous avons  $i_{\mathcal{C}}(z) - z_0 = \frac{r^2}{z - z_0}$  soit  $i_{\mathcal{C}}(z) = z_0 + \frac{r^2}{z - z_0}$ .

Notons  $f : z \mapsto e^{-i\theta}(z - b)$  le déplacement du plan envoyant  $d$  sur l'axe réel. (On pourra prendre  $b \in d$  et  $e^{i\theta}$  un vecteur directeur de  $d$ .) Le déplacement  $f$  conjugue la réflexion par rapport à  $d$  à la réflexion par rapport à  $\mathbb{R}$  i.e.  $i_d(z) = e^{i\theta} \overline{e^{-i\theta}(z - b)} + b = e^{i2\theta} \bar{z} + b(1 - e^{i\theta})$ .

Remarquons que l'inversion par rapport au cercle  $\mathcal{C}(z_0, |z_0|)$  converge uniformément sur tout compact vers l'inversion par rapport à la droite passant par 0 de direction  $\frac{z_0}{|z_0|}$  lorsque  $|z_0| \rightarrow +\infty$  mais  $\arg(z_0)$  reste constant.

2. En déduire qu'une inversion renverse l'orientation des angles et qu'elle transforme les droites et les cercles en droites ou en cercles.

Les inversions ci-dessus sont des homographies composées avec la conjugaison complexe. Nous avons vu en cours (calculs laissés en exercices) que les homographies préservent transforment les cercles et les droites en des cercles ou des droites. Il en est de même de la conjugaison complexe.

### Exercice [Principe de réflexion de Schwarz 1]

On notera  $\mathbb{H} = \{\text{Im} > 0\}$ ,  $\bar{\mathbb{H}} = \{\text{Im} \geq 0\}$ ,  $-\mathbb{H} = \{\text{Im} < 0\}$ .

Soit  $U$  un domaine de  $\mathbf{C}$  invariant par la conjugaison complexe et  $f : U \cap \bar{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction continue telle que  $f$  soit holomorphe sur  $U \cap \mathbb{H}$  et  $f(U \cap \mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ .

1. Montrer que la formule  $z \mapsto i_{\mathbf{R}} \circ f \circ i_{\mathbf{R}}(z)$  permet d'étendre  $f$  en une fonction continue sur  $U$ , holomorphe sur  $U \cap (\mathbb{H} \cup -\mathbb{H})$ .

La formule définit une fonction  $\bar{f}$  continue sur  $U \cap (-\bar{\mathbb{H}})$

Puisque  $f(U \cap \mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ ,  $f$  et  $\bar{f}$  coïncident sur  $U \cap \mathbf{R}$ , la fonction  $\bar{f}$  permet d'étendre continument  $f$  sur  $U$ .

Développons  $f$  en série entière au voisinage d'un point  $z_0 \in U \cap \mathbb{H} : f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ . La continuité de la conjugaison donne  $\bar{f}(\bar{z}) = \sum \bar{a}_n(z - \bar{z}_0)^n$ , ce qui prouve l'holomorphie de  $\bar{f}(z) = f(\bar{z})$  au voisinage de  $\bar{z}_0 \in U \cap (-\mathbb{H})$ .

2. En utilisant le théorème de Morera, vérifier que l'extension est holomorphe sur  $U$ .

Nous noterons encore  $f$  l'extension. Nous devons vérifier que pour tout rectangle  $R$  de cotés parallèles aux axes réels et imaginaires,  $\int_R f(z) dz = 0$ . Ceci est le théorème de Cauchy(-Goursa?) si le rectangle ne rencontre pas l'axe réel. Dans le cas contraire  $R_\ell$  à pour sommet  $a - i\ell$ ,  $a + L - i\ell$ ,  $a + L + i\ell$ ,  $a + i\ell$  avec  $L$  et  $\ell$  positifs. L'intégrale  $\int_R \ell f(z) dz$  ne dépend pas de  $\ell$  tant que  $\ell > 0$  car la différence entre deux de ces intégrales est une somme d'intégrales sur des rectangles ne rencontrant pas  $\mathbf{R}$ .

Reste à montrer que  $\int_{a-i\ell}^{a+L-i\ell} f(z) dz$  et  $\int_{a+i\ell}^{a+L+i\ell} f(z) dz$  ont même limite lorsque  $\ell \rightarrow 0$  afin d'obtenir  $\int_R \ell f(z) dz \xrightarrow{\ell \rightarrow 0} 0$ , ce dernier ne dépendant pas de  $\ell$ ...

Pour ce faire, on remarque que  $f$  étant continu sur le rectangle, elle y est uniformément continue et donc que  $f|_{[a - i\ell, a + L - i\ell]}$  converge uniformément vers  $f|_{[a, a + L]}$  ainsi  $\int_{a-i\ell}^{a+L-i\ell} f(z) dz \rightarrow \int_a^{a+L} f(z) dz$

**Exercice** [Principe de réflexion de Schwarz 2]

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux disques de  $\hat{\mathbf{C}}$  d'inversions  $i_1$  et  $i_2$ . Soit  $U$  un domaine de  $\hat{\mathbf{C}}$  invariant par  $i_1$  et  $f : U \cap \overline{D_1} \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction continue telle que  $f$  soit holomorphe sur  $U \cap D_1$  et  $f(U \cap \partial D_1) \subset \partial D_2$ . Montrer que  $f$  s'étend en une fonction méromorphe sur  $U$ .

Nous étendons  $f$  continument sur  $U$  par  $f(i_1(z)) = i_2(f(z))$ .

Nous pourrions effectuer le même raisonnement que dans l'exercice précédent en remplaçant les rectangles par des rectangles circulaires dont les cotes sont des arcs de cercles à  $D_1$  où des segments alignés avec le centre de  $D_1$ .

Nous allons nous ramener à l'exercice 1 en montrant qu'une inversion est toujours conjuguée par une homographie à la conjugaison complexe. Premièrement,  $z \mapsto \frac{1}{r}(z - z_0)$  est une dilatation (ou une translation) qui envoie  $\mathcal{C}(z_0, r)$  sur  $\mathbb{S}^1$ . On vérifie que cette application conjugue les deux inversions. Maintenant l'application  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  envoie  $\mathbb{H}$  sur  $\mathbb{D}$  et elle conjugue la conjugaison complexe à l'inversion par rapport à  $\mathbb{S}^1$ . La composée de ces deux donne la conjugaison cherchée.

En pré-composant  $f$  avec l'application qui conjugue  $i_1$  à la conjugaison complexe et en la post-composant avec l'application qui conjugue  $i_2$  à la conjugaison complexe, on se ramène à l'exercice précédent.

**Exercice**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\overline{\mathbb{D}}$ , holomorphe dans  $\mathbb{D}$  telle que  $f(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{S}^1$ .

1. Montrer que  $f$  est rationnelle.
2. Montrer que si  $\alpha$  est un zéro de  $f$  alors  $\frac{1}{\alpha}$  est un pôle de  $f$ .

Par le principe du maximum,  $f$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{D}$ . La fonction  $f$  peut se prolonger sur  $\hat{\mathbf{C}}$  en utilisant le principe de réflexion de Schwarz. par  $f(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{\bar{z}})}$ . Nous avons alors  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  et  $f(\hat{\mathbf{C}} \setminus \mathbb{D}) \subset \hat{\mathbf{C}} \setminus \mathbb{D}$ .

Si  $z_0 \in \mathbb{D}$  n'est pas un zéro de  $f$  alors le prolongement est holomorphe en  $\frac{1}{\bar{z}_0}$ . Si  $f(z_0) = 0$  alors le prolongement est holomorphe sur un voisinage  $\frac{1}{\bar{z}_0}$  épointé et par construction sa limite en  $\frac{1}{\bar{z}_0}$  est  $\infty$ . Nous avons donc construit une fonction méromorphe sur  $\hat{\mathbf{C}}$ , c'est-à-dire une fonction rationnelle.

**Exercice**

Soit  $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ . Si  $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$  et  $f(i\mathbf{R}) \subset i\mathbf{R}$ , montrer que  $f$  est impaire.

Notons  $i_1$  et  $i_2$  les réflexions par rapport aux droites  $\mathbf{R}$  et  $i\mathbf{R}$ . D'après le principe de réflexion de Schwarz (et le principe des zéros isolés)  $i_1 \circ i_2 \circ f = f \circ i_2 \circ i_1$ . La composition des réflexions par rapport aux deux axes est  $z \rightarrow -z$  (indépendamment de l'ordre de composition).