Exercice [Equations d'Euler]
Soient c_1 et c_2 deux nombres complexes. Donner une base de solutions de l'équation suivante :

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+c_1z\frac{du}{dz}+c_2u=0$$

Vous pouvez chercher les solutions sous la forme z^α et s'il en manque une $z^\alpha \log z$.

Pour comprendre cet méthode, je vous propose une correction (plus difficile) utilisant les polynomes d'endomorphismes. Notre équation se réécrit $(z\frac{d}{dz})(z\frac{d}{dz})u+(c_1-1)(z\frac{d}{dz})u+u=0$.

Commençons par remarquer que cette équation a deux singularités dans $\hat{\mathbf{C}}$. L'une en $z=0$ (du moins tant que c_1, c_2 sont non nuls) et l'autre en ∞. Nous resolverons donc l'equation sur un domaine simplement connexe $U\subset\mathbf{C}^*$ afin de pouvoir utiliser le log (et donc les puissancesnon entières). On vérifie que c'est z^α est un vecteur propre de $z\frac{d}{dz}$ de valeurs propre α : $z\frac{d}{dz}(z^\alpha)=\alpha(z^\alpha)$.

Notre équation s'écrie $P(z\frac{d}{dz})(u)=0$ avec $P(X)=X^2+(c_1-1)X+c_2$ ainsi en restriction à l'espace vectoriel de dimension 2 des solutions, P est un polynome annulateur de $z\frac{d}{dz}$. Si les deux racines α_1 et α_2 de P sont des valeurs propres distinctes alors $z\frac{d}{dz}$ est diagonalisable : on a une base de solutions $z^{\alpha_1}, z^{\alpha_2}$.

Si $z\frac{d}{dz}$ n'est pas diagonalisable alors nous savons qu'il existe un vecteur propre (donc une solution de l'équation de la forme z^α) qu'on peut compléter en une base de telle sorte que la matrice de $z\frac{d}{dz}$ dans cette base soit un bloc de Jordan de diagonal α : puis que $z\frac{d}{dz}(\ln z)=1$ et $z\frac{d}{dz}(z^\alpha \ln z)=z\frac{d}{dz}(z^\alpha)\ln z+z^\alpha z\frac{d}{dz}(\ln z)$, $z^\alpha \ln z$ est le second vecteur de la base.

Remarque 1. *Je profite de cet exemple pour vous monter comment effectuer le changement de variable* $w = \frac{1}{z}$*. Nous avons alors* $\frac{d}{dz} = -w^2\frac{d}{dw}$*, ceci signifie que pour si* $\tilde{u}(w) = u(1/w)$ *alors* $\frac{du}{dz}(1/w) = -w^2\frac{d\tilde{u}}{dw}(w)$ *(j'oublierai volontier le tilde). Ainsi notre équation dans la nouvelle coordonnée est*

$$(1/w)^2(-w^2\frac{d}{dw})(-w^2\frac{d}{dw})u + c_1(1/w)(-w^2\frac{d}{dw})u + c_2u = 0$$

c'est-à-dire

$$w^2\frac{d^2u}{dw^2} - (c_1-2)w\frac{d}{dw})u + c_2u = 0.$$

Cette équation est bien singulière en $w = 0$ *(i.e.* $z = \infty$*) du moins tant que* $c_1 \neq 2$ *ou* $c_2 \neq 0$*.*

Exercice [Seconde solution]
Si u_1 est une solution (non nulle) de

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p\frac{du}{dz} + qu = 0$$

et ω une solution (non nulle) de $\frac{dW}{dz} + pW = 0$ alors $u_2 = u_1\int\frac{\omega}{u_1^2}dz$ est une solution de notre équation, indépendante de u_1.

Si $u_1(z)$ est une solution, on cherche la seconde sous la forme $k(z)u_1(z)$ (variation de la constante). On injecte cette forme dans l'équation et on obtient

$$k''(z)u_1 + 2k'(z)u_1'(z) + p(z)k'(z)u_1(z) = 0$$

Ceci se réecrit $k''/k' = -2u_1'/u_1 - p$ ce qui montre que k' est le produit d'une solution de $f'/f = -2u_1'/u_1$ et d'une solution de $g'/g = -p$.

Exercice[Changement de variable, changement d'inconnue]
Considérons l'équation différentielle
$$\frac{d^2u}{dz^2}+p\frac{du}{dz}+qu=0$$
Montrer que

1. si $z=g(w)$ et $v=u\circ g$ alors $\frac{d^2v}{dw^2}+(p\circ gg'-\frac{g''}{g'})\frac{dv}{dw}+(q\circ gg'^2)v=0$
   On a
   $$\frac{dw}{dz}\frac{d}{dw}v=\frac{d}{dz}u$$
   i.e. $g'(w)\frac{dv}{dw}(w)=\frac{du}{dz}(g(w))$ et de même
   $$(\frac{dw}{dz}\frac{d}{dw})(\frac{dw}{dz}\frac{d}{dw})v=\frac{d^2}{dz^2}u$$
   Nous composons l'équation avec g puis on remplace les dérivées de u évaluées en g par les dérivées de v suivant les deux formules bleues ci-dessus.
2. si $u=h\circ v$, en notant $f=\frac{h'}{h}$, alors $\frac{d^2v}{dz^2}+(p+2f)\frac{dv}{dz}+(q+pf+f'+f^2)v=0$
   Après avoir corrigé les typos, il suffit de dériver les fonctions composées.

Exercice[Différentes formes d'une équation d'ordre deux]
Considérons u_1 et u_2 une base de solution de l'équation différentielle
$$\frac{d^2u}{dz^2}+p\frac{du}{dz}+qu=0$$
Vérifiez que

1. $\frac{u_1'}{u_1}$ est solution d'une équation de Riccati.
2. $\tau=\frac{u_2}{u_1}$ est solution d'une équation Schwarzienne :
   $$S(\tau)=-p'-\frac{1}{2}p^2+2q.$$

   il n'y a que du calcul

Exercice[Lamé & Weierstrass]

Soient $Q(z) = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)$ un polynome de degré 3 ayant trois racines distinctes telles que $e_1+e_2+e_3 = 0$, $n \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{C}$. Considérons l'équation de Lamé

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{Q'}{Q}\frac{du}{dz} - \frac{n(n+1)z+b}{Q}u = 0$$

1. Donner, pour chaque singularités (dans $\hat{\mathbf{C}}$) de l'équation, son type et ses exposants.

   Nous n'avons pas encore vu en cours les différents types de singularités. Nous nous contenterons de déterminer les singularités. Les trois zéros de Q sont des pôles des coefficients. ce sont donc trois singularités. Reste à voir si ∞ est une singularitÃ©. Nous faisons le changement de variable $w = \frac{1}{z}$:

   $$(w^4\frac{d^2}{dw^2} + 2w^3\frac{d}{dw})\tilde{u}(w) + \frac{1}{2}\frac{Q'}{Q}(1/w)(-w^2\frac{d}{dw})\tilde{u}(w) + \frac{n(n+1)1/w+b}{Q(1/w)}\tilde{u} = 0$$

   Par exemple $w^4Q(1/w) = w\prod(1-e_iw)$ a un zéro simple, le coefficient de $\tilde{u}$, une fois l'équation mise sous forme résolue à un pole d'ordre 2, ou 1 si $n = 0$. ∞ est une singularité

2. Effectuer le changement de variable $z = \wp(w)$.

   On nous propose un autre changement de variable. La fonction $\wp(w)$ est solution de $(\frac{d\wp}{dw})^2 = Q(\wp)$. Nous supposerons que ce Q est associé à une fonction de Weierstrass. C'est toujours le cas mais la preuve n'a pas été vue en cours.

   A priori le changement de variable n'étant pas bijectif, nous allons être confronté au choix d'une branche inverse $\wp^{-1}$ c'est-à-dire une zacine de Q. Plaçons sur un domaine simplement connexe sur lequel Q ne s'annulle pas de sorte qu'on puisse choisir une telle racine, on choisit telle que $\frac{d\wp}{dw} = \sqrt{Q(\wp)}$.

   $$\sqrt{Q(z)}\frac{d}{dz} = \frac{d}{dw} \quad \text{et} \quad Q(z)\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2}\sqrt{Q}\frac{d}{dz} = \frac{d^2}{dw^2}$$

et notre équation devient

$$\frac{d^2u}{dw^2} - (n(n+1)\wp(w) + b)u = 0$$

3. Les singularités de l'équation en la variable z sont-elles images par $\wp$ des singularités de l'équation en la variable w ?

   NON

   Notre nouvelle équation a des singularités sur le réseau des périodes de $\wp$. L'image des singularités par $\wp$ est donc réduit à ∞. il manque les 3 autres singularités.

   Le changement de variable les a désingularisé.

4. Résoudre l'équation de Lamé dans la cas $n = 0$.

   Lorsque $n = 0$ nous obtenons $\frac{d^2u}{dw^2} - bu = 0$ dont une base de solution est $e^{\pm\sqrt{b}w}$. Dans la variable initiale, une base de solutions est donc

$$\exp(\pm\sqrt{b}\int \frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}).$$