Contrôle continu 1h30

mercredi 16 octobre 2019

Produits de Blaschke

Notations

On notera $\mathbb{D}$ le disque unité, $\mathbb{S}^1$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 ($\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$) . Pour $a \in \mathbb{D}$ non nul, on note $B_a(z) = \frac{|a|}{a}\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ et $B_0(z) = -z$. Pour une suite finie $A = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{D}^m$ on notera

$$B_A(z) = \prod_{k=1}^{m} B_{a_k}(z).$$

Pour une suite finie A on notera n le nombre d'occurrence de 0 et A' la suite des termes non nuls de A. On notera $B_\varnothing(z) = 1$.

Questions de cours

Enoncez le lemme de Schwarz.

Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe s'annulant en 0 alors pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leqslant |z|$

Produits finis

1. Montrez que $B_a(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.

   Puisque cette homographie transforme les cercles en des cercles ou des droites, il suffit de calculer l'image de trois point du cercle unité ou encore de vérifier que si $z\bar{z} = 1$ alors le module du numerateur $|z-a| = |z||1-a\bar{z}|$ est le module du conjugué du dénominateur.

2. Montrez que pour $c \in \mathbb{D}$ la fonction $B_A(z) - c$ s'annulle m fois (comptés avec multiplicité), puis que ses zéros sont dans $\mathbb{D}$.

   Le numérateur de cette fonction est un polynome de degré m. De plus si $z \notin \mathbb{D}$ alors $|B_a(z)| > 1$ et *a fortiori* le produit de tels termes a un module supérieur à 1 contrairement à c.

3. Si $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, montrez qu'il existe $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tel que $B_A \circ h = \lambda B_{h^{-1}A}$ où $h^{-1}A$ est la suite $(h^{-1}(a_1), \ldots, h^{-1}(a_m))$.

   Il suffit de le vérifier pour chaque facteur du produit. Ces facteurs sont des automorphismes de $\mathbb{D}$ la composition de B_a avec h est un automorphisme s'annulant en $h^{-1}(a)$. A un multiple de module 1 près c'est $B_{h^{-1}(a)}$.

4. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe s'annulant sur les élements de A avec multiplicités au moins celles de B_A. On veut montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$ $|f(z)| \leqslant |B_A(z)|$

   On suppose $a_1 = 0$ et on pose $F(z) = \frac{f(z)}{z^{n-1}B_{A'}(z)}$.

   (a) Montrez que F est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et s'annule en 0.

   En les zéros du dénominateur, le numérateur s'annule au moins autant de fois, le quotient est holomorphe en ces points. Ailleurs il n'y a pas de problème. Le numérateur s'annule n fois en 0, le dénominateur $n-1$ fois. Le quotient s'annule un fois en 0.

   (b) Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r \in]0,1[$ (proche de 1) tel que $\min_{\partial D(0,r)} |B_{A'}| \geqslant 1 - \varepsilon$.

   Les homographies étant continues leurs produit l'est aussi : les images de compacts proches sont des compacts proches. D'après la première question l'image de $\mathbb{S}^1$ est $\mathbb{S}^1$: pour tout ε, il existe un R tel que les cercles de rayon $r > R$ sont envoyés à distance moins de ε de $\mathbb{S}^1$.

   (c) Déduisez-en que sur $D(0,r)$ $|F(z)| \leqslant \frac{1}{r^{n-1}(1-\varepsilon)}$, puis que $|F| \leqslant 1$ sur $\mathbb{D}$.

   Montrons cette inégalite sur le bord du disque. En appliquant le résultat précédent à $B_{A'}$ et en écrivant que $|z| = r$ et $|f| < 1$, non avons l'inégalité souhaitée. Le principe du maximum nous donne l'inégalité sur tout le disque.Cette inégalité étant valable pour toutes les valeurs de r plus grand que celle détermiée à la question précédente, nous pouvons laisser r tendre vers 1 puis ε tendre vers 0 et obtenons $|F| \leqslant 1$.

   (d) Concluez

   Au vu de la question 2, nous pouvons, quitte à composer avec un automorphisme h, supposer que $a_1 = 0$ la question 3 donnera que $|f \circ h| \leqslant |B_A \circ h|$. La composition avec h^{-1} donne l'inégalité.

5. Montrez que pour tout indice k, $|f'(a_k)| \leqslant |B'_A(a_k)|$.

   La dérivée en a_k est la limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{1}{h}(f(a_k+h) - f(a_k))$. Puis que $f(a_k) = 0$, le passage la limite dans l'inégalité montrée en 4 donne l'inégalité souhaitée.

6. Montrez que si il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ n'apparaissant pas dans A tel que $|f(z_0)| = |B_A(z_0)|$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tel que $f = \lambda B_A$

   Reprenons les notations de la question 4. La fonction holomorphe F est bornée en module par 1 si elle atteint cette borne dans le disque, le principe du maximum nous assurera qu'elle sera constante et en module égale à 1.

7. Déduisez des question précédentes que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est holomoprhe et $a \in D$ alors pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \quad \text{et} \quad |f'(a)| \leqslant \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$$

Si f est holomorphe alors $B_{f(a)} \circ f$ est une fonction holomorphe du disque dans le disque qui s'annule en a. Elle est donc tout le temps majorée par B_a en module. Apres avoir multiplié l'inégalité par le dénominateur du premier membre et divisé par le numérateur du second membre, un passage à la limite lorsque z tend vers a donne la seconde inégalité.

Produits infinis

Soit $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite infinie d'éléments de $\mathbb{D}$. On veut montrer qu'il existe une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{D}$ s'an--nullant exactement sur les a_k comptés avec multiplicité si et seulement si $\sum(1-|a_k|)$ converge. *Nous montrerons une implication lors de cet examen, la seconde est laissée à faire chez vous.*

1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. Justifiez le fait que les zéros de f forment un ensemble fini ou dénombrable.
   Dans chaque disque fermé $\overline{D}(0,r) \subset \mathbb{D}$ le principe des zeros isolés assure qu'il n'y a qu'un nombre fini de zéros. En comptant les zéros par paquets dans $D(0, 1-1/(n+1)) - D(0, 1-1/n)$, nous obtenons la dénombrabilite de cet ensemble.
2. Supposons que $\sum(1-|a_k|)$ converge .
   (a) Montrez que $1 - B_{a_k}(z) = (1-|a_k|)\frac{1+(|a_k|/a_k)z}{1-\overline{a_k}z}$.
   En mettant les deux membres sur le même dénominateur et en comparant les numérateurs on remarque l'égalité
   (b) Déduisez-en que sur $D(0,r) \subset \mathbb{D}$, $|1-B_{a_k}(z)| \leqslant (1-|a_k|)\frac{1+r}{1-r}$
   Nous montrerons cette majoration sur le bord du disque, le principe du maximum la donnera à l'intérieur. Le numérateur se majore avec l'inégalité triangulaire.Le dénominateur se minore avec "la seconde" inégalité triangulaire.
   (c) Concluez.
   La majoration précédente et l'hypothèse faite sur les a_k nous permettent d'utiliser le théorème de convergence des produits. Le produite de Blaschke $\prod_{k=1}^{\infty} B_{a_k}(z)$ converge sur tout disque fermé inclus dans le disque unité vers une fonction holomorphe dont les zéros sont ceux des facteurs. Nous avons donc construit une fonction bornée par 1 (en tant que produit de facteurs bornées par 1) s'annulant là où nous le souhaitions.

---

3. Soit f une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{D}$ et $(a_k)_{k\geqslant 1}$ la suite de ces zéros.
   (a) Soit F une fonction holomorphe sur un voisinage de $\mathbb{D}$ ne s'annulant pas, montrez que pour $r \in [0,1]$

   $$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(re^{i\theta})|d\theta$$

   F ne s'annullant pas sur $\mathbb{D}$, il admet un logarithme dnt la partie réelle est $\log|F|$. L'inégalité est lpropriété de la moyenne pour la fonction harmonique $\log|F|$.
   (b) Déduisez-en que si $r < 1$ et f ne s'annule ni sur le cercle de rayon r, ni en 0, alors

   $$\log|f(0)| + \sum_{|a_k|\leqslant r} \log(r/|a_k|) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

   Considérons A_r la suite finie des élements de $\frac{1}{r}A$ de module inférieur à r et $F(z) = \frac{f(z)}{B_{A_r(z/r)}}$. Cette dernière ne s'annule pas sur $\overline{D(0,r)}$ et pour $|z| = r$, nous avons $|F(z)| = |f(z)|$ nous pouvons utiliser la formule de la "moyenne logarithmique" sur ce disque qui donne légalité souhaitée :

   $$\log|f(0)| - \log|B_{A_r}(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

   (c) Concluez.
   Nous voulons montrer que la série $\sum(1-|a_k|)$ ce qui revient à montrer que le produit $\prod|a_k|$ converge vers un nombre non nul. Nous supposerons que f ne s'annule pas en 0 sinon nous la remplacerons par $\frac{f(z)}{z^{\nu_0(f)}}$ qui sera bornée, s'annulant en les zéros de f sauf 0.
   D'après la formule précédente et la bornitude de f sur le disque unité, il existe M telle que

   $$\log|f(0)| + \sum_{|a_k|\leqslant r} \log(r/|a_k|) \leqslant M$$

   Pour $K \leqslant \#\{|a_k| \leqslant r\}$

   $$\prod_K \frac{r}{|a_k|} \leqslant \prod_{|a_k|\leqslant r} \frac{r}{|a_k|} \leqslant \frac{e^{-M}}{|f(0)|} > 0$$

   En faisant tendre r vers 1 on minore la suite des produits partiels. Cette suite étant décroissante, elle converge vers un nombre strictement positif.Ceci prouve la convergence de la série.