Mathématiques pour le signal discret – Ma32

Guy Casale

IRMaR bât 21 Beaulieu

`http ://perso.univ-rennes1.fr/guy.casale/`

Références

A First Course in Mathematical Analysis
David Brannan, Cambridge University Press

Mathématiques BTS-DUT Industriels
C. Larcher, M. Pariente, J.-C. Roy, Techniplus

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

1 Suites numériques

1.1 Quelques définitions.

Définition 1 *Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (suite réelle) ou $\mathbb{C}$ (suite complexe) qui à un entier n associe un nombre u_n.*

Une suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) et u_n est appelé le terme général de la suite.

Cette notation est une abréviation de $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots)$.

Exemples 1

- *Les décimales d'un nombre : l'écriture de π est* $(3, 1, 4, 1, 5, \ldots)$.
- *Suites définies à partir d'une formule f en prenant les valeurs de f en les entiers : Si $f(x) = \dfrac{x^2 + e^{\sin x}}{\sqrt{|x|} - \pi}$, f définit une suite $u_n = f(n)$.*
- *Suites constantes $u_n = c \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(c, c, c, c, c, \ldots)$.*
- *La suite des températures (en $°C$) relevées tous les matins à l'IUT :* $(8.5, 12, 9.2, 7.6, 8, \ldots)$.
- *Echantillonnage à la période T_e d'un signal F :*

$$(F(t_0), F(t_0 + T_e), \ldots, F(t_0 + nT_e), \ldots) = (u_0, u_1, \ldots u_n \ldots).$$

Nous verrons d'autres exemples dans la suite du cours.

Représentations graphiques

Opérations sur les suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

On définit la **somme** $(u_n) + (v_n)$ terme à terme :

$$\begin{array}{cccccccccc} & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \ldots & u_n & \ldots &) \\ + & (& v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \ldots & v_n & \ldots &) \\ = & (& u_0+v_0 & u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 & u_4+v_4 & \ldots & u_n+v_n & \ldots &) \end{array}$$

On définit le **produit** $(u_n) \times (v_n)$ terme à terme :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \ldots & u_n & \ldots &) \\ \times & (& v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \ldots & v_n & \ldots &) \\ = & (& u_0v_0 & u_1v_1 & u_2v_2 & u_3v_3 & u_4v_4 & \ldots & u_nv_n & \ldots &) \end{array}$$

On définit le **décalage "+1"** ou vers le futur (u_{n+1}) :

$$\begin{array}{ccccccccccc} (u_n) & = & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \ldots & u_n & \ldots &) \\ (u_{n+1}) & = & (& u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & \ldots & u_{n+1} & \ldots &) \end{array}$$

On définit le **décalage "-1"** ou vers le passé (u_{n-1}) :

$$\begin{array}{ccccccccc} (u_n) & = & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \ldots & u_n \\ \ldots &) \\ (u_{n-1}) & = & (& 0 & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \ldots & u_{n-1} \\ \ldots &) \end{array}$$

Définissez vous même les décalages $\pm k$ pour $k \in \mathbb{N}$:

Définition 2 *Une suite réelle (u_n) est dite*

- **majorée** *si*

- **minorée** *si*

- **bornée** *si*

- **croissante** *si*

- **décroissante** *si*

Remarque 1 *Une suite (z_n) de nombres complexes ne peut pas être qualifiée de décroissante ou décroissante car on ne peux pas toujours comparer deux nombres complexes. Les suites*
- *$(\Re e z_n)$ des parties réelles,*
- *$(\Im m z_n)$ des parties imaginaires,*
- *$(|z_n|)$ des modules*

peuvent être croissantes, décroissantes, bornées, ...

Deux caractérisations de la variation d'une suite :

- Une suite réelle (u_n) est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $u_{n+1} - u_n$ est toujours
(resp.).

- Une suite réelle (u_n) de nombres **strictement positifs** est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est
(resp.).

Démonstration par récurrence.

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

1. On montre que la propriété est vraie au rang n_0 *i.e.* $P(n_0)$ est vraie.
2. On montre que si pour n fixé, $P(n-1)$ est vraie alors $P(n)$ l'est aussi *i.e.* $P(n-1) \Rightarrow P(n)$.

Exemple 2

Calculez par récurrence la somme des n premiers carrés :

$$Sc(n) = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

1.

2.

Exemple 3 *Montrez par récurrence qu'une suite (u_n) vérifiant $u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2$ pour tout n est croissante ou décroissante.*

1.2 Limites & convergence

Définition 3 *On dit qu'une suite* (u_n) **tend (ou converge) vers** *un nombre* ℓ *si pour toute précision* ε *il existe un rang* N *tel que pour tout* $n \geq N$ *les nombres* u_n *soient à une distance* ε *de* ℓ *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Exemple 4 *Montrons qu'à partir d'un certain rang la suite de terme général* $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ *est plus petit que* 10^{-10}.

S'il existe, le nombre ℓ est appelé la **limite** de la suite (u_n) et on note

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

S'il n'existe pas on dit que la suite **diverge**.

Exemples 5

- *La suite de terme général* $u_n = e^{-n}$ *converge vers* 0.
- *La suite de terme général* $u_n = \dfrac{n}{n+2}$ *converge vers* 1.
- *La suite de terme général* $u_n = n^2$ *ne converge pas.*
- *La suite de terme général* $u_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ *ne converge pas.*

Théorème 1

- *Si la limite existe elle est unique.*

- *Une suite convergente est bornée.*

- *Si* (u_n) *et* (v_n) *vérifient* $u_n = v_n$ *lorsque* $n > n_0$ *alors*
  (u_n) *converge si et seulement si* (v_n) *converge.*

- *S'il existe* $q \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_{n+q} = v_n$ *pour tout* n *alors*
  (u_n) *converge si et seulement si* (v_n) *converge.*
  Si elles convergent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Preuve. – ... $\square$

Théorème 2 *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
(Toute suite décroissante et minorée est convergente.)

Preuve. – ...

$\square$

Exemple 6 *Montrons que la suite définie par* $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ *converge.*

1.3 Règles opératoires sur les limites.

1.3.1 Combinaisons linéaires.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

1.3.2 b. Produits et quotients.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$
Si de plus les v_n ainsi que ℓ' sont non nuls alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell'}$.

1.3.3 Image par une fonction continue.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si f est une fonction continue en ℓ alors

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

ATTENTION <u>Ceci est faux si f n'est pas continue.</u>

1.4 Suites classiques.

1.4.1 Suites arithmétiques.

Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est définie par récurrence par $u_{n+1} = u_n + r$.

On démontre (par récurrence) que $u_n = u_0 + nr$.

- Si $r = 0$, la suite est constante, tous les termes valent u_0.

- Si $r > 0$, la suite est croissante mais n'est pas majorée.

- Si $r < 0$, la suite est décroissante mais elle n'est pas minorée.

La somme des n premiers termes d'un suite arithmétique vaut :
$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$

1.4.2 Suites géométriques.

Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est définie par récurrence par $u_{n+1} = qu_n$.

On démontre (par récurrence) que $u_n = q^n u_0$.
Si $u_0 = 0$ tous les termes de la suite sont nuls. Sinon plusieurs cas se présentent :

- Si $q = 0$ la suite est constante égale à 0 à partir du second terme.

- Si $q = 1$ la suite est constante, tous le termes valent u_0.

- Si $q = -1$ la suite vaut alternativement u_0 et $-u_0$.

- Si $|q| > 1$ la suite ne converge pas.

- Si $|q| < 1$ la suite converge vers 0.

La somme des n premiers termes d'un suite géométrique vaut :
$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$

1.4.3 Suites adjacentes.

Définition 4 *Deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont dites* **adjacentes** *si* (u_n) *est croissante,* (v_n) *est décroissante,* $u_n \leq v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

Proposition 1 *Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite.*

Preuve. –

$\square$

Exemple 7 *Étudions la convergence des suites*

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$
$$v_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}.$$

On peut calculer la limite de ces suites, elles tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$.

1.4.4 Suites extraites.

Définition 5 *Étant donnée une suite (u_n), une suite (v_n) est extraite de (u_n) s'il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\phi(n)}$.*

Exemple 8 *Si (u_n) est une suite, les suites $v_n = u_{n^2}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont des suites extraites de (u_n)*

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
(u_n) & = & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & \dots & \dots & u_n & \dots &) \\
 & \Rightarrow & (& u_0 & u_1 & \cancel{u_2} & \cancel{u_3} & u_4 & \cancel{u_5} & \cancel{u_6} & \cancel{u_7} & \cancel{u_8} & u_9 & \dots & \dots &) \\
(u_{n^2}) & = & (& u_0 & u_1 & u_4 & u_9 & u_{16} & u_{25} & u_{36} & u_{49} & \dots & \dots & u_{n^2} & \dots &) \\
|| & & (& || & || & || & || & || & || & || & || & \dots & \dots & || & \dots &) \\
(v_n) & = & (& v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & \dots & \dots & v_n & \dots &)
\end{array}
$$

Théorème 3 *Si une suite (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.*

Preuve. – ... □

Exemple 9 *La suite $u_n = (-1)^n$ ne converge pas car les suites extraites $v_n = u_{2n} = 1$ et $w_n = u_{2n+1} = -1$ ne convergent pas vers la même limite.*

Exemple 10 *La suite de nombres complexes $z_n = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ne converge pas.*

1.4.5 Suites définies par récurrence.

Définition 6 *Une suite réelle (ou complexe)* (u_n) *est définie par récurrence à partir de son premier terme* u_0 *s'il existe une fonction* f *telle que* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2 *Si* f *est continue et si la suite* (u_n) *définie à partir de* u_0 *par* $u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* ℓ *alors* $\ell = f(\ell)$.

Preuve. – ... $\square$

Exemple 11 (La suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$**)**

Exemple 12 (La suite définie par $u_{n+1} = ru_n(1 - u_n)$**)**

Si $1 < r < 3$ la suite converge effectivement vers $\frac{r-1}{r}$.
Pour $r > 3$ le comportement de la suite est plus chaotique.
(c.f `http ://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map`)

1.4.6 Suites définies par une récurrence double.

Définition 7 *Une suite réelle (u_n) est définie par récurrence double à partir de ses deux premiers termes u_0 et u_1 s'il existe une fonction f de deux arguments telle que $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Regardons les suites réelles définies par une récurrence double linéaire :

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

$$i.e. \quad u_{n+2} = -\frac{b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n$$

L'équation

$$ar^2 + br + cb = 0 \qquad \text{(C)}$$

s'appelle **l'équation caractéristique** associé, notons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ alors $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1 et r_2 sont les deux racines de (C).

- Si $\Delta = 0$ alors $u_n = (\lambda n + \mu)r^n$ où r est la racine double de (C).

- Si $\Delta < 0$ alors $u_n = (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)\rho^n$
où $r_1 = \overline{r_2} = \rho e^{i\theta}$ sont les deux racines de (C).

Exemple 13 *La suite définie par*

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

à partir de $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ a-t-elle une limite ?

2 Séries numériques

2.1 Définitions et notations.

Définition 8 *Soit* (u_n) *une suite numérique. La suite* (S_N) *de terme général*

$$S_N = u_0 + u_1 + \ldots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

est appelée **série** *de terme général* u_n.

S_N *est la* **somme partielle d'ordre** N. *On notera* $\sum u_n$ *la série de terme général* u_n.

Définitions 9 *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique. Elle est dite convergente si la suite des sommes partielles* (S_N) *converge vers un nombre* S.

Dans ce cas S *est appelé* **somme** *de la série et est noté* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$,

et $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ *est le* **reste d'ordre** N *de la série.*

Une série non convergente est dite divergente.

Exemples 14

– *Série géométrique de raison plus petite que 1 :* $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Les sommes partielles valent

$$S_N =$$

C'est une série convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \qquad .$

– *Série géométrique de raison plus grande que 1 :* $u_n = 2^n$.
Les sommes partielles valent

$$S_N =$$

C'est une série divergente.

2.2 Premières propriétés

Proposition 3 *Si la série* $\sum u_n$ *converge alors* $u_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Preuve. –

$\square$

ATTENTION $\underline{\text{Si } u_N \underset{N\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \text{ on ne sait rien sur } \sum u_n.}$

Exemples 15 *La série géométrique de raison* q : $\sum q^n$ *diverge lorsque* $|q| \geq 1$.

Théorème 4

- *Si* $\sum u_k$ *et* $\sum v_k$ *vérifient* $u_k = v_k$ *lorsque* $k > p$ *alors*

$$\sum u_k \text{ converge si et seulement si } \sum v_k \text{ converge}$$

- *S'il existe* $q \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_{k+q} = v_k$ *pour tout* k *alors*

$$\sum u_k \text{ converge si et seulement si } \sum v_k \text{ converge}$$

2.3 La série harmonique : $\sum \frac{1}{k}$.

Le terme général tend vers 0 mais la série diverge.

Les sommes partielles sont $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Considérons la suite extraite $T_N = S_{2^N}$. On a alors

$$T_{N+1} - T_N \quad =$$

La suite extraite (T_N) diverge, la suite (S_N) est donc aussi divergente :

$$\boxed{\text{la série harmonique diverge.}}$$

Voir aussi l'exercice 6 du TD 1

Interprétation physique sur `http ://www.etudes.ru (/ru/mov/mov006/index.php)`

2.4 Séries géométriques

La série géomérique de premier terme a et de raison q est

$$\sum aq^n.$$

Théorème 5

- *Si* $|q| < 1$ *la série* $\sum aq^n$ *converge vers* $\frac{a}{1-q}$.
- *Si* $|q| \geq 1$ *et* $a \neq 0$ *la série* $\sum aq^n$ *est divergente.*

Preuve. – - c.f. le cours sur les suites - □

Exemple 16 *Montrons que* $0,33333\ldots = \dfrac{1}{3}$.

2.5 Séries téléscopiques

Exemple 17 *Les sommes partielles de la série* $\sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ *se calculent facilement.*

$$\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) =$$

Calculons la somme de $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Fixons $p \in \mathbb{N}_{>0}$. *Que pouvez-vous dire de la série* $\sum \frac{1}{n(n+p)}$ *?*

2.6 Opérations sur les séries

Proposition 4 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\mu \in \mathbb{R}$*. Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Preuve. – ... □

Remarques 2

1 - Si $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge alors* $\sum u_n + v_n$ *diverge.*

2 - Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *divergent alors on ne sait rien sur* $\sum u_n + v_n$*.*

Considérez $u_n = 1/n$ *et* $v_n = -1/n$*.*

3 - La série produit $\sum u_n v_n$ $\boxed{\text{n'a pas}}$ *pour somme* $(\sum u_n)(\sum v_n)$*.*

Calculez $\sum(1/2)^n$, $\sum(1/3)^n$ *et* $\sum(1/6)^n$*.*

2.7 Séries à termes positifs

Ce sont les séries $\sum u_n$ avec $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 5 *Une série à terme positifs $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.*

Preuve. – ... $\square$

2.7.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 6 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

- *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Preuve. – $\ldots$ $\square$

Exemple 18 *Montrons que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge.*

2.7.2 Théorèmes de comparaison

Théorème 7 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs avec* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
La série $\sum u_n$ *converge si et seulement si* $\sum v_n$ *converge.*

Rappel $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Preuve. – ... □

Exemple 19 *Montrons que la série* $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$ *diverge.*

2.7.3 Critère de d'Alembert

Théorème 8 *Soit* $\sum u_n$ *une série à terme positifs telle que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- *Si* $\ell < 1$*, la série converge.*
- *Si* $\ell > 1$*, la série diverge.*

Preuve. – … □

Exemple 20 *Montrons que la série* $\displaystyle\sum \frac{1}{n!}$ *converge.*

Faites calculer à votre calculatrice $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$ puis $\sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n!}$. Que remarquez-vous ? Reconnaissez-vous ce nombre ?

2.8 Critère de Cauchy

Théorème 9 *Soit* $\sum u_n$ *une série à terme positifs telle que* $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- *Si* $\ell < 1$*, la série converge.*
- *Si* $\ell > 1$*, la série diverge.*

Preuve. – … □

Exemple 21 *Montrons que la série* $\sum \frac{1}{n^n}$ *converge.*

2.9 Comparaison avec une intégrale

Théorème 10 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continue et décroissante.*

La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Preuve. –

$\square$

Exemple 22 (Séries de Riemann) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont appelées séries de Riemann.*

Montrons qu'une série de Riemann converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

2.10 Séries à termes réels

Définition 10 *Une série* $\sum u_n$ *est dite* **absolument convergente** *si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Théorème 11 *Si* $\sum u_n$ *est une série absolument convergente alors elle converge.*

Preuve. – ... $\square$

Exemple 23 *Montrons que la série* $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ *converge.*

2.11 Séries alternée

Définition 11 *Une série* $\sum u_n$ *est dite* **alternée** *si ces termes sont alternativement positifs et négatifs.*

Théorème 12 *Soit* $\sum u_n$ *une série alternée. Si* $|u_n|$ *décroit et tend vers* 0 *alors la série* $\sum u_n$ *est convergente. Plus précisement,*

$$\big|R_N\big| = \big|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\big| \leq |u_{N+1}|.$$

Preuve. – ... □

Exemple 24 *Montrons que la série* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *converge mais ne converge pas absolument.*

2.12 Séries à termes complexes

Proposition 6 *Une série à termes complexes* $\sum u_n$ *converge si et seulement si les séries à termes réels* $\sum \Re e(u_n)$ *et* $\sum \Im m(u_n)$ *convergent.*

Définition 12 *Une série à termes complexes* $\sum u_n$ *est dite* **absolument convergente** *si la série à termes positifs* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Théorème 13 *Si* $\sum u_n$ *est une série à termes complexes absolument convergente alors elle converge.*

Preuve. – ... □

2.13 La série $\sum z^k$.

Proposition 7

– *Si* $|z| \geq 1$ *la série* $\sum z^k$ *est divergente.*

– *Si* $|z| < 1$ *la série* $\sum z^k$ *converge absolument et sa somme vaut*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k =$$

Exemple 25 *Calculons les sommes des deux séries* $\sum a_k$ *et* $\sum b_k$ *avec*

$$a_k = \frac{\cos k\theta}{2^k} \text{ et } b_k = \frac{\sin k\theta}{2^k}.$$

3 Séries entières

3.1 Définitions et notations.

Définition 13 *Une* **série entière** *est une série*

$$\sum a_n x^n$$

où x est un nombre réel ou complexe et a_n est le terme général d'une suite de nombres réels ou complexes.

Ce sont des sommes infinies de puissances de x. Elles généralisent les polynômes.

Exemples 26

- *Si $a_n = 0$ lorsque $n > p$ alors $\sum a_n x^n =$* .
- *Si $a_n = 1$ pour tout n alors $\sum x^n$ est une série géométrique.*

Remarque 3 *Si $|x| < 1$ la série $\sum x^n$ est une* **fonction** *de x et on peut la calculer :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \qquad .$$

Lemme 1 *Si la série $\sum a_n X^n$ converge et $|x| < |X|$ alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.*

Preuve. – Ceci est déjà démontré dans le cours sur les séries numériques. □

Théorème 14 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Il existe un unique nombre $R \geq 0$, éventuellement infini, tel que :*
- *si $|x| < R$, la série converge absolument,*
- *si $|x| > R$, la série diverge.*

Ce nombre est appelé le **rayon de convergence** *de la série.*

Preuve. – ...

□

Définition 14 *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. L'ensemble des* x *tels que* $|x| < R$ *est le* **domaine de convergence** *de la série.*

Si on travaille avec des nombres réels, c'est un intervalle $]-R, R[$*.*

Si on travaille avec des nombres complexes, c'est un disque $D(0, R)$*.*

Exemples 27

– *Le rayon de convergence de la série réelle* $\displaystyle\sum x^n$ *est* 1 *car ...*

Le domaine réel de convergence de cette série est $]-1, 1[$*.*
Elle ne converge que pour $x \in]-1, 1[$*.*

– *Le rayon de convergence de la série réelle* $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n}$ *est* 1 *car ...*

Le domaine réel de convergence de cette série est $]-1, 1[$*.*
Par contre elle converge pour $x \in [-1, 1[$*.*

– *Le rayon de convergence de la série réelle* $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n^2}$ *est* 1 *car ...*

Le domaine réel de convergence de cette série est $]-1, 1[$*.*
Par contre, elle converge pour $x \in [-1, 1]$*.*

3.2 Détermination du rayon de convergence

– **Critère de d'Alembert**

Si $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \neq 0$
alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$.
Preuve. –

□

– **Critère de Cauchy**

Si $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \ell \neq 0$
alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$.
Preuve. –

□

Remarques 4
- *Le critère de d'Alembert ne s'applique que si* $a_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang.*
- *Si* $\ell = 0$ *alors* $R = +\infty$*, si* $\ell = +\infty$ *alors* $R = 0$.

Exemple 28 *La série réelle* $\sum \frac{1}{n!}x^n$.

Exemple 29 *La série réelle* $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

3.3 Somme d'une série entière.

Définition 15 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Notons D son domaine de convergence. La somme de la série $\sum a_n x^n$ est une fonction de x, $f : D \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), définie par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans certain cas on peut calculer cette somme.

Exemples 30

- *La somme de la série $\displaystyle\sum x^n$ est*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ pour } x \in]-1, 1[.$$

- *La somme de $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n}$ est*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \qquad\qquad\qquad \text{pour } x \in]-1, 1[.$$

- *La somme de $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n^2}$ est*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \qquad\qquad\qquad \text{pour } x \in]-1, 1[.$$

3.4 Opérations sur les séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 et de sommes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ respectivement.

3.4.1 Combinaisons linéaires

Proposition 8 *Si λ_1 et λ_2 sont deux nombres, la série $\sum(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n$ a un rayon de convergence R tel que*

- $R = min(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$,

- $R \geq R_1$ si $R_1 = R_2$.

La somme de $\sum(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n$ est

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x).$$

Preuve. – - c.f. le cours sur les séries- □

3.4.2 Multiplication

Proposition 9 *Le produit de deux série entière est une série entière :*

$$\left(\sum a_n x^n\right) \times \left(\sum b_n x^n\right) = \sum c_n x^n$$

avec $\boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.}$

Le rayon de convergence R de cette série entière vérifie $R \geq min(R_1, R_2)$.

Preuve. –

□

Exemple 31 *Le produit $\sum x^n \times \sum n x^n$ est la série entière suivante :*

3.5 Propriétés de la somme

Théorème 15 *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *et*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- f *est continue sur* $]-R, R[$ *et pour tout* $[a, b] \subset]-R, R[$,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx.}$$

- f *est dérivable sur* $]-R, R[$ *et sa dérivée est obtenue comme la somme*

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ pour tout } x \in]-R, R[.}$$

- f *a pour primitive valant* 0 *en* 0 *la somme*

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \text{ pour tout } x \in]-R, R[.}$$

Preuve. – ...

□

Exemples 32

- *La somme de la série entière* $\sum(n+2)x^n$ *est la fonction suivante :*

- *La somme de la série entière* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ *est la fonction suivante :*

3.6 Développement en série entière

Définition 16 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un disque de $\mathbb{C}$ contenant 0. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est dite* **développable en série entière en** 0 *s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ pour tout } |x| < R.$$

Si elle existe cette série est unique et coïncide avec la **série de Taylor** *de f en 0 :*

$$f(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Exemples 33

- *La fonction (réelle ou complexe) $f(x) = e^{-x^2}$ est la somme de la série :*

- *D'autres fonctions réelles comme $g(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ avec $g(0) = 0$* **ne sont pas** *développables en série entière.*

3.7 Développements en série entière de fonctions usuelles

Fonction		Série	Rayon de convergence
$\dfrac{1}{1-x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R=1$
e^x	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R=+\infty$
$\cos x$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R=+\infty$
$\sin x$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R=+\infty$
$\cosh x$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R=+\infty$
$\sinh x$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R=+\infty$
$(1+x)^\alpha$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R=1$
$\ln(1+x)$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$R=1$
$\vdots$			

3.8 Applications

3.8.1 Quel est le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?

3.8.2 Quelle est la limite de $\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{x^2}$ lorsque $x \to 0$?

3.8.3 Calculons à 10^{-3} près $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx$.

3.8.4 Trouvons une solution de l'équation différentielle

$$2xy'' + 2y' - y = 0$$

telle que $y(0) = 1$ sous forme de série entière.

4 Transformée en z

4.1 Définitions et notations.

Définition 17 *La* **transformée en** z *d'une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la somme de la série :*

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{z^n}.$$

Si le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est $R > 0$;
en posant $x = \frac{1}{z}$,

$$A(z) \text{ est bien définie pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \left|\frac{1}{z}\right| < R \text{ soit } |z| > \frac{1}{R}.$$

Le fonction $A(z)$ est aussi notée $\mathscr{Z}[a_n]$.
On appelle $(a_n)_n$ l'original de $A(z)$.

Exemple 34 *Si* $a_n = 1$ *pour tout* n *alors le rayon de convergence est* 1*. Pour* $z > 1$ *on a*

$$A(z) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Définition 18 *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction nulle sur* $\mathbb{R}_{<0}$ **(signal causal)** *et* $T_e \in \mathbb{R}_{>0}$*. L'échantillonnage de* f *de période* T_e *est la suite*

$$(f(nT_e))_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

La transformée en z *d'un échantillonage* $(f(nT_e))_n$ *est la somme de la série :*

$$F(z) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

lorsqu'elle existe.

On la note $F(z)$*,* $\mathscr{Z}[f(nT_e)]$ *ou* $\mathscr{Z}[f]$ *si* T_e *est explicite.*

4.2 Exemples fondamentaux.

4.2.1 Échelon unité

Le signal est

$$U(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Son échantillonage à la période T_e est la suite de terme général

$$U(nT_e) = \qquad .$$

Sa transformée en z :

$$\mathscr{Z}[U(nT_e)] \ =$$

$$\boxed{\qquad \textbf{pour } z \in \mathbb{C} \textbf{ tel que } |z| > 1 \qquad .}$$

4.2.2 Suite de Dirac

La suite est définie par

$$\begin{aligned}\delta(0) &= 1\\ \delta(n) &= 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}_{>0}.\end{aligned}$$

Sa transformée en z :

$$\mathscr{Z}[\delta(n)] \;=$$

pour $z \in \mathbb{C}$.

4.2.3 Suite exponentielle

Le signal est

$$f(t) = q^t = \exp(t \ln q).$$

Son échantillonage à la période T_e est la suite de terme général

$$f(nT_e) = q^{nT_e}.$$

Sa transformée en z :

$\mathscr{Z}[q^{nT_e}] \; =$

$$\boxed{\textbf{pour } z \in \mathbb{C} \textbf{ tel que } \left|\frac{q^{T_e}}{z}\right| < 1 \; i.e. \; |z| > |q|^{T_e}\textbf{.}}$$

En particulier si $T_e = 1$: $\boxed{\mathscr{Z}[q^n] = \frac{z}{z-q} \text{ pour } |z| > |q|.}$

4.3 Propriétés.

4.3.1 Linéarité

Théorème 16 *Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites et* λ*,* μ *deux nombres. Alors*

$$\mathscr{Z}[\lambda a_n + \mu b_n] = \lambda \mathscr{Z}[a_n] + \mu \mathscr{Z}[b_n].$$

Preuve. – ... □

Exemples 35 *Calculons* $\mathscr{Z}[\cos(\omega n)]$ *et* $\mathscr{Z}[\sin(\omega n)]$.

4.3.2 Retard

Théorème 17 (du retard) *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite ; notons* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite retardée donnée par*

$$\begin{array}{rcll} b_n & = & a_{n-p} & \text{si } n \geq p > 0 \\ b_n & = & 0 & \text{si } n < p \end{array}.$$

Alors

$$\mathscr{Z}[b_n] = \frac{1}{z^p}\mathscr{Z}[a_n].$$

L'égalité du théorème se réécrit $\boxed{\mathscr{Z}[U(n-p)a_{n-p}] = z^{-p}\mathscr{Z}[a_n].}$

Preuve. –

□

4.3.3 Avance

Théorème 18 (de l'avance) *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite ; notons* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite avancée donnée par* $b_n = U(n)a_{n+1}$*. Alors*

$$\mathscr{Z}[b_n] = z(\mathscr{Z}[a_n] - a_0).$$

On peut généraliser ce théorème par récurrence $\boxed{\mathscr{Z}[U(n)a_{n+p}] = z^p\left(\mathscr{Z}[a_n] - \sum_{k=0}^{p-1}\frac{a_k}{z^k}\right).}$

Preuve. –

□

4.3.4 Multiplication par n.

Proposition 10 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors*

$$\boxed{\mathscr{Z}[na_n] = -z\tfrac{d}{dz}\mathscr{Z}[a_n].}$$

Preuve. –

$\square$

4.3.5 Multiplication par q^n, $q \in \mathbb{C}$.

Proposition 11 *Soit $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite. Alors*

$$\boxed{\mathscr{Z}[q^n a_n](z) = \mathscr{Z}[a_n]\left(\tfrac{z}{q}\right).}$$

Preuve. –

$\square$

4.4 Transformée d'un signal périodique

Théorème 19 *Soient $T_e \in \mathbb{R}_{>0}$ et f un signal mT_e-périodique. Notons f_0 le motif élémentaire de f*

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, mT_e[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\boxed{\mathscr{Z}[f(nT_e)] = \tfrac{z^m}{z^m-1}\mathscr{Z}[f_0(nT_e)],}$$

ou avec d'autres notations :

$$F(z) = \frac{z^m}{z^m - 1}F_0(z).$$

pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

Preuve. –

□

4.5 Valeur initiale et valeur finale

Théorème 20 (de la valeur initiale) *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite et* $A(z)$ *sa transformée en* z*. Si la limite existe on a :*

$$\boxed{\lim_{|z|\to+\infty} A(z) = a_0.}$$

Preuve. –

$\square$

Théorème 21 (de la valeur finale) *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite et* $A(z)$ *sa transformée en* z*. Si les limites existent on a :*

$$\boxed{\lim_{|z|\to 1} A(z)\left(1-\tfrac{1}{z}\right) = \lim_{n\to+\infty} a_n.}$$

Preuve. –

$\square$

4.6 Transformée en z et convolution

Rappels

1. Si f et g sont deux fonctions nulles sur $\mathbb{R}_{<0}$, on note

$$(f * g)(x) = \int_{\tau=0}^{\tau=x} f(\tau)g(x-\tau)d\tau \text{ le } \textbf{produit de convolution} \text{ de } f \text{ et } g.$$

2. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites, on note

$$(a * b)_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k b_{n-k} \text{ le } \textbf{produit de convolution} \text{ de } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Compatibilité

Soit T_e une période d'échantillonnage, $\left| \begin{array}{l} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est l'échantillonnage de } f \\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est l'échantillonnage de } g \end{array} \right.$

alors $\big((a*b)_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'échantillonnage de $(f*g)$.

Théorème 22 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On a*

$$\boxed{\mathscr{Z}[(a*b)_n] = \mathscr{Z}[a_n]\cdot\mathscr{Z}[b_n].}$$

Soient f et g deux signaux casaux et $F(z)$ et $G(z)$ leurs transformées en z de période d'échantillonnage T_e. On a

$$\boxed{\mathscr{Z}[f*g] = F(z)\cdot G(z).}$$

Preuve. –

$$\mathscr{Z}[(a*b)_n] \quad =$$

En remplaçant $n-k$ par m :

$\square$

4.7 Transformée inverse & Applications

Comment retrouver l'original d'une transformée en z ?

Exemple 36 *On cherche une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\left\{\begin{array}{l} 2a_{n+1} + a_n = U(n) \\ a_0 = 0 \end{array}\right.$.

La transformée en z étant linéaire on obtient

Le théorème de l'avance donne

et on a donc

c'est-à-dire $\mathscr{Z}[a_n] =$.

Comment obtenir a_n ?

Soit $A(z)$ une fonction d'une variable complexe z.
Existe-t-il $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A(z) = \mathscr{Z}[a_n]$?

Première méthode : Développer $A(z)$ en série entière de $x = \frac{1}{z}$ en utilisant les tables de séries entières.

Deuxième méthode : Si $A(z)$ est une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples puis on utilise les propriétés de la TZ et les tables de transformées usuelles.

Exemple 37 (fin de l'exemple précédent)

Prenons

$$A(z) = \frac{z}{(z-1)(2z+1)} =$$

Or d'après ce que nous avons déjà vu :

$$\mathscr{Z}[U(n)] = \qquad\qquad et \quad \mathscr{Z}[(-1/2)^n U(n)] = \qquad\qquad .$$

Nous avons donc

4.8 Suite définies par une récurrence double linéaire.

$$\alpha \; a_{n+2} + \beta \; a_{n+1} + \gamma \; a_n = b_n$$

α, β, γ étant des constantes et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite donnée et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite inconnue qu'on cherche à déterminer.

En utilisant la linéarité et le théorème d'avance, on obtient

Exemple 38 *Trouver une suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\left\{ \begin{array}{l} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = \delta \\ y_0 = 1 \quad y_1 = 0 \end{array} \right.$.

Comparer avec l'exemple de la fin du chapitre sur les suites.