4 Transformée en z

4.1 Définitions et notations.

Définition 1 *La* **transformée en** z *d'une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la somme de la série :*

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{z^n}.$$

Si le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est $R > 0$;
en posant $x = \frac{1}{z}$,

$$A(z) \text{ est bien définie pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \left|\frac{1}{z}\right| < R \text{ soit } |z| > \frac{1}{R}.$$

Le fonction $A(z)$ est aussi notée $\mathscr{Z}[a_n]$.
On appelle $(a_n)_n$ l'original de $A(z)$.

Exemple 1 *Si* $a_n = 1$ *pour tout* n *alors le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 0} x^n$ *est* 1.
Pour $z > 1$ *on a*

$$A(z) = \qquad\qquad\qquad .$$

Définition 2 *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction nulle sur* $\mathbb{R}_{<0}$ **(signal causal)** *et* $T_e \in \mathbb{R}_{>0}$. *L'échantillonnage de* f *de période* T_e *est la suite*

$$(f(nT_e))_n = \qquad\qquad\qquad .$$

La transformée en z *d'un échantillonage* $(f(nT_e))_n$ *est la somme de la série :*

$$F(z) = \qquad\qquad\qquad .$$

lorsqu'elle existe.

On la note $F(z)$, $\mathscr{Z}[f(nT_e)]$ *ou* $\mathscr{Z}[f]$ *si* T_e *est explicite.*

4.2 Exemples fondamentaux.

4.2.1 Échelon unité

Le signal est

$$U(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Son échantillonage à la période T_e est la suite de terme général

$$U(nT_e) = \qquad .$$

Sa transformée en z :

$$\mathscr{Z}[U(nT_e)] =$$

$$\boxed{\textbf{pour } z \in \mathbb{C} \textbf{ tel que } |z| > 1 \qquad .}$$

4.2.2 Suite de Dirac

La suite est définie par

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 1 \\ \delta(nT_e) &= 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}_{>0}. \end{aligned}$$

Sa transformée en z :

$$\mathscr{Z}[\delta(nT_e)] \ =$$

$$\boxed{\textbf{pour } z \in \mathbb{C}\textbf{.}}$$

4.2.3 Suite exponentielle

Le signal est

$$f(t) = a^t = \exp(t \ln a).$$

Son échantillonage à la période T_e est la suite de terme général

$$f(nT_e) = a^{nT_e}.$$

Sa transformée en z :

$\mathscr{Z}[a^{nT_e}] \;=$

$$\boxed{\textbf{pour } z \in \mathbb{C} \textbf{ tel que } \left|\frac{a^{T_e}}{z}\right| < 1 \; i.e. \; |z| > |a|^{T_e}\textbf{.}}$$

En particulier si $T_e = 1$: $\boxed{\mathscr{Z}[a^n] = \frac{z}{z-a} \text{ pour } |z| > |a|.}$

4.3 Propriétés.

4.3.1 Linéarité

Théorème 1 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites et* λ, μ *deux nombres. Alors*

$$\mathscr{Z}[\lambda u_n + \mu v_n] = \lambda \mathscr{Z}[u_n] + \mu \mathscr{Z}[v_n].$$

Preuve. – ... $\square$

Exemples 1 *Calculons* $\mathscr{Z}[\cos(\omega n)]$ *et* $\mathscr{Z}[\sin(\omega n)]$.

4.3.2 Retard

Théorème 2 (du retard) *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite ; notons* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite retardée donnée par*

$$\begin{array}{lcll} w_n & = & v_{n-p} & \text{si } n \geq p > 0 \\ w_n & = & 0 & \text{si } n < p \end{array}.$$

Alors

$$\mathscr{Z}[w_n] = \frac{1}{z^p}\mathscr{Z}[v_n].$$

L'égalité du théorème se réécrit $\boxed{\mathscr{Z}[U(n-p)v_{n-p}] = z^{-p}\mathscr{Z}[v_n].}$

Preuve. –

□

4.3.3 Avance

Théorème 3 (de l'avance) *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite ; notons* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite avancée donnée par* $w_n = U(n)v_{n+1}$*. Alors*

$$\mathscr{Z}[w_n] = z(\mathscr{Z}[v_n] - v_0).$$

On peut généraliser ce théorème par récurrence : $\boxed{\mathscr{Z}[U(n)v_{n+p}] = z^p\left(\mathscr{Z}[v_n] - \sum_{k=0}^{p-1}\frac{v_k}{z^k}\right).}$

Preuve. –

□

4.3.4 Multiplication par n.

Proposition 1 *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. Alors*

$$\boxed{\mathscr{Z}[nv_n] = -z\frac{d}{dz}\mathscr{Z}[v_n].}$$

Preuve. –

$\square$

4.3.5 Multiplication par a^n, $a \in \mathbb{C}$.

Proposition 2 *Soit* $(v_n)_n \in \mathbb{N}$ *une suite. Alors*

$$\boxed{\mathscr{Z}[a^n v_n](z) = \mathscr{Z}[v_n]\left(\frac{z}{a}\right).}$$

Preuve. –

$\square$

4.4 Transformée d'un signal périodique

Théorème 4 *Soient $T_e \in \mathbb{R}_{>0}$ et f un signal mT_e-périodique. Notons f_0 le signal*

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, mT_e[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\boxed{\mathscr{Z}[f(nT_e)] = \tfrac{z^m}{z^m-1}\mathscr{Z}[f_0(nT_e)],}$$

ou avec d'autres notations :

$$F(z) = \frac{z^m}{z^m - 1} F_0(z).$$

pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

Preuve. –

$\square$

4.5 Valeur initiale et valeur finale

Théorème 5 (de la valeur initiale) *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite et* $A(z)$ *sa transformée en* z*. Si la limite existe on a :*

$$\boxed{\lim_{|z|\to+\infty} A(z) = a_0.}$$

Preuve. –

□

Théorème 6 (de la valeur finale) *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite et* $A(z)$ *sa transformée en* z*. Si les limites existent on a :*

$$\boxed{\lim_{|z|\to+\infty} A(z)\left(1-\tfrac{1}{z}\right) = \lim_{n\to+\infty} a_n.}$$

Preuve. –

□

4.6 Transformée en z et convolution

Rappels

1. Si f et g sont deux fonctions nulles sur $\mathbb{R}_{<0}$, on note

$$(f * g)(x) = \int_{\tau=0}^{\tau=x} f(\tau)g(x-\tau)d\tau \text{ le } \textbf{produit de convolution} \text{ de } f \text{ et } g.$$

2. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites, on note

$$(a * b)_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k b_{n-k} \text{ le } \textbf{produit de convolution} \text{ de } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Compatibilité

Soit T_e une période d'échantillonnage, $\left| \begin{array}{l} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est l'échantillonnage de } f \\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est l'échantillonnage de } g \end{array} \right.$

alors $\big((a*b)_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'échantillonnage de $(f*g)$.

Théorème 7 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On a*

$$\boxed{\mathscr{Z}[(a*b)_n] = \mathscr{Z}[a_n]\cdot\mathscr{Z}[b_n].}$$

Soient f et g deux signaux casaux et $F(z)$ et $G(z)$ leurs transformées en z de période d'échantillonnage T_e. On a

$$\boxed{\mathscr{Z}[f*g] = F(z)\cdot G(z).}$$

Preuve. –

$$\mathscr{Z}[(a*b)_n] \quad =$$

En remplaçant $n-k$ par m :

$\square$

4.7 Transformée inverse & Applications

Comment retrouver l'original d'une transformée en z ?

Exemple 2 *On cherche une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\begin{cases} 2a_{n+1}+a_n=U(n) \\ a_0=0 \end{cases}$.

La transformée en z étant linéaire on obtient

Le théorème de l'avance donne

et on a donc

c'est-à-dire $\mathscr{Z}[a_n] =$.

Comment obtenir a_n ?

Soit $A(z)$ une fonction d'une variable complexe z.
Existe-t-il $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A(z) = \mathscr{Z}[a_n]$?

Première méthode : Développer $A(z)$ en série entière de $x = \frac{1}{z}$ en utilisant les tables de séries entières.

Deuxième méthode : Si $A(z)$ est une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples puis on utilise les propriétés de la TZ et les tables de transformées usuelles.

Exemple 3 (fin de l'exemple précédent)

Prenons

$$A(z) = \frac{z}{(z-1)(2z+1)} =$$

Or d'après ce que nous avons déjà vu :

$$\mathscr{Z}[U(n)] = \qquad\qquad \textit{et} \quad \mathscr{Z}[(-1/2)^n U(n)] = \qquad\qquad .$$

Nous avons donc

4.8 Suite définies par une récurrence double linéaire.

$$\alpha \ a_{n+2} + \beta \ a_{n+1} + \gamma \ a_n = b_n$$

α, β, γ étant des constantes et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite donnée et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite inconnue qu'on cherche à déterminer.

En utilisant la linéarité et le théorème d'avance, on obtient

Exemple 4 *Trouver une suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\left\{ \begin{array}{l} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = \delta \\ y_0 = 1 \quad y_1 = 0 \end{array} \right.$.

Comparer avec l'exemple de la fin du chapitre sur les suites