UFR Mathématiques — Université Rennes 1
Licence 2ème année — Automne 2007

Étude de fonctions, équations différentielles
TP3 – Résolutions approchées d'équations différentielles

On considère le modèle de Lotka-Volterra d'évolution des populations deux espèces, par exemples des requins et des sardines, dont les populations sont notées respectivement $r(t)$ et $s(t)$. Les taux d'accroissement de ces espèces sont données par

$$s'(t) = as(t) - bs(t)r(t) \quad \text{et} \quad r'(t) = -cr(t) + dr(t)s(t)$$

a, b, c, d étant des constantes dépendant des espèces considérées.

1°) Résolution numérique – Écrire une fonction MATLAB `Euler.m` mettant en œuvre la méthode d'Euler pour calculer les valeurs approchées de la solution ayant pour condition initiale `s0,r0` sur l'intervalle de temps `[0,T]` pour un pas `h` en fonction des paramètres `a,b,c,d`.

2°) Résolution numérique – Faites de même pour la méthode de Runge-Kutta : `RK.m`.

3°) Illustrations – Écrire deux scripts `SolEuler.m` et `SolRK.m` qui tracent sur un même graphique les valeurs approchées de s et de r en fonction du temps obtenues pour les paramètres

`a=2, b=0.4 c=1, d=0.1, T=5, h=0.1`

dans chacun de cas donnés par les conditions initiales suivantes

`[s0,r0] = [22,8] , [18,7] , [14,6] , [10,5].`

Écrire un script qui trace sur un seul et même graphique les valeurs approchées de s en fonction de celles de r pour les paramètres et conditions initiales ci-dessus.

3°) Comparaison – Trouvez avec du papier et un crayon une intégrale première du système de Lotka-Volterra c'est-à-dire une fonction $L(s, r)$ qui reste constante lorsque r et s évoluent. On cherchera L de la forme

$$L(s, r) = \alpha r + \beta s + \gamma \ln r + \delta \ln s.$$

Que pouvez-vous en déduire sur la forme tracer par $(s(t), r(t))$ dans $\mathbb{R}^2$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$? Est-ce cohérent avec les graphiques donné par le deuxième script de la question précédente ?

Écrire un script qui trace sur un même graphique les valeurs approchées de s en fonction de celles de r et leurs valeurs exactes pour les paramètres ci-dessus et la condition initiale `[14,6]`.

Tournez la page ...

“Rappels”

Runge-Kutta – La méthode de Runge-Kutta classique pour obtenir des valeurs approchées d'une solution d'une équation d'ordre 1 et **de rang** p **(***i.e.* **d'inconnue** $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$**, c'est a dire un vecteur de** p **fonctions)**

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) & \forall t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

consiste à calculer y_{n+1} au temps $t_{n+1} = t_n + h$ à partie de y_n au temps t_n par

$$\begin{aligned}
&k_1 = f(y_n) \\
&k_2 = f(y_n + (h/2)k_1) \\
&k_3 = f(y_n + (h/2)k_2) \\
&k_4 = f(y_n + (h/2)k_3) \\
&y_{n+1} = y_n = (h/6)(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4)
\end{aligned}$$