Étude de fonctions, équations différentielles
TP2 – Résolutions approchées d'équations différentielles

Le but de ce TP est d'utiliser les schémas numériques de résolution d'Euler et Runge-Kutta pour étudier certaines équations différentielles. Nous allons appliquer les schémas d'Euler et Runge-Kutta à la résolution d'équations que l'on sait résoudre analytiquement afin de comparer le résultat obtenu par la résolution numérique à la solution analytique.
Rappellons que la méthode d'Euler consiste à obtenir des valeurs approximatives pour les valeurs en certains temps t_n d'une solution V d'une équation différentielle

$$\frac{dV}{dt} = f(t, V)$$

en l'approximant localement par sa tangente. On obtient la valeur approchée $\underline{V}_{n+1}$ en t_{n+1} à partir de la valeur approchée $\underline{V}_n$ en t_n par

$$\underline{V}_{n+1} = \underline{V}_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, \underline{V}_n).$$

Exercice 0 – Comment calcule-t-on les valeurs approchées d'une solution par le schéma de Runge-Kutta ?

I - Chute d'un corps

La vitesse d'un corps en chute libre sous la seule action de la pesanteur dans l'atmosphère est donnée par le principe fondamentale de la dynamique. Elle est solution de l'équation différentielle suivante :

$$m\frac{dV}{dt} = -kV^2 + mg$$

avec :

- $V(t)$ en m/s : la vitesse du corps au temps t,
- m =70Kg : masse du corps,
- g=9,81N/Kg : accélération de la pesanteur,
- k=0,27Kg/m : résistance de l'air,
- $0 \leq t \leq 20$s : intervalle de temps sur lequel on cherche la solution,
- $V(0)$=0 : la condition initiale.

1°) Résolution numérique – Écrivez un script MATLAB `chute_Euler.m` calculant les valeurs approchées de la solution ayant pour condition initiale $V(0)$=0 sur l'intervalle de temps considéré pour un pas $h = 0{,}1$s (*i.e.* $t_{n+1} = t_n + h$).

2°) Résolution analytique – Résolvez l'équation sur une feuille pour la condition initiale donnée. *Indication* : nous l'avons déjà résolue en TD.

3°) Comparaison – Tracez le graphe donnant les valeurs approchées et comparez le au graphe de la solution analytique.

1°-bis) Résolution numérique – Écrivez une fonction MATLAB `chute_RK.m` calculant les valeurs approchées de la solution ayant pour condition initiale $V(0)=0$ sur l'intervalle de temps considéré pour un pas $h = 0{,}1$s (*i.e.* $t_{n+1} = t_n + h$).

II- Dynamique de population

La variation de la population $y(t)$ d'une espèce animale dans un milieu donné est modélisée en exprimant que son taux de croissance à l'instant t : $\frac{y'(t)}{y(t)}$ est une fonction affine de sa population :

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = a_1 - a_2\, y(t).$$

La terme $a_2\, y(t)$ exprime la décroissance due au ressources limitées du milieux. – *Que représente le terme a_1 ?*–

1°) Résolution numérique – Écrivez une fonction `[t,y]=Pop_Euler(a1,a2,t0,y0,T,h)` qui donne des valeurs approchées par la méthode d'Euler de la solution ayant comme donnée initiale `(t0,y0)` sur l'intervalle `[t0,t0+T]`. L'entrée `h` est le pas de la résolution et `t` est un vecteur ligne contenant les abscisses de calcul.

2°) Résolution analytique – Résolvez cette équation différentielle sur du papier.

3°) Comparaison – Tracez sur un même graphique les graphes obtenus dans les cas `t0=0;T=5;y0=15;` `a1=2;a2=0.1` et `h=T/2^(I+2)` pour `I=1,...,6`.

Tracez le graphe donnant les erreurs de la résolution approchée en fonction de h. Comment varient les erreurs ?

III- Devoir à la maison n° 2 – Partie numérique

Exercice 1 - Écrivez les fonctions MATLAB permettant d'obtenir des valeurs approchées par les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta pour la solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = -tx$$

valant `x0` en `t`$= 0$ sur l'intervalle $[0, 15]$ pour un pas `h` valant $0,3$.

Tracez quelques solutions et comparez-les à la solution exacte obtenue en séparant les variables. Votre ordinateur fait-il du bon boulot ?

Exercice 2 - Écrivez les fonctions MATLAB permettant d'obtenir des valeurs approchées par les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta pour la solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - t$$

valant `x0` en `t`$= 0$ sur l'intervalle $[0, 25]$ pour un pas `h` valant $0,4$.

Tracez quelques solutions et comparez-les au comportement qualitatif obtenu en cours. Votre ordinateur fait-il du bon boulot ?

Exercice 3 - Votre ordinateur ne fait que ce que vous lui demandez, il existe des méthodes qui permettent de faire faire à l'ordinateur les calculs d'une meilleur manière que ce que vous lui avez demandé. Cherchez puis testez sur l'exercice 2 la méthode dite "d'Euler implicite".
Il n'y a pas de page "Euler implicite" sur Wikipédia mais vous en trouverez plein sous Google . . . et plus sûrement dans des livres de mathématiques !