TD n°4 : Transformée en z

4.1. – Suite finie –

Considérons la suite $(x_n)_n$ définie par

$$x_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

a) Calculer la transformée en z de x, notée $X(z)$ à paretir de la définition.

b) Retrouver ce résultat à l'aide des suites échelons et du théorème de retard.

4.2. – Suite périodique –

Considérons le signal causal $f(t)$ de période 2 défini par

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ 0 \text{ si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

a) Calculer la transformée en z, de la suite $(f(nTe))_n$ pour une cadence d'échantillonnage $T_e = 1/5$.

b) Retrouver ce résultat à l'aide des suites échelons et du théorème de retard.

4.3. – Signal périodique échantillonné –

a) Calculer la transformée en z du signal $f_0(t) = \sin t$ pour $0 \leq t \leq \pi$ et $f_0(t) = 0$ sinon, échantillonné à la période $T_e = \pi/6$.

b) En déduire la transformée $F(z)$ du signal $f(t) = |\sin t| U(t)$ échantillonné à la période $T_e = \pi/6$.

4.4. – Transformée inverse –

Soit $H(z) = \dfrac{z}{2z^2 - 3z + 1}$.

a) Déterminer la suite $(h_n)_n$ telle que $H(z) = \mathscr{Z}[h_n]$, on dit aussi $(h_n)_n = \mathscr{Z}^{-1}[H]$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n$.

4.5. – Équation récurrente linéaire I –

À l'aide de la transformée en z résoudre l'équation récurrente linéaire

$$\begin{cases} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = \delta(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ y_0 = 1 \quad y_1 = 0 \end{cases}.$$

4.6. – Équation récurrente linéaire II –

Soit l'équation linéaire récurrente :

$$y(n) - \frac{1}{2}y_{n-1} = x_n - 2x_{n-1} pour tout n \in \mathbb{N}.$$

On supposera que x_n et y_n sont nuls lorsque $n < 0$. Les trasnformées en z de $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ seront notées $X(z)$ et $Y(z)$.

a) Calculer $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.

b) En déduire la suite $(h_n)_n = \mathscr{Z}^{-1}[H]$.

c) Calculer la suite $(y_n)_n$ dans las cas suivant :

1. $(x_n)_n$ est la suite de dirac δ (*réponse impulsionnelle*),
2. $x_n = U(n)$ (*réponse indicielle*),
3. $x_n = e^{in\omega}$ (*réponse harmonique*).

4.7. – Convolution –

Toutes les suites considérees sont nulles pour $n < 0$.

a) Calculer la trasformée en z de la suite de terme général $(-1)^n$.

b) En déduire la transformée en z de la suuite de terme général $n(-1)^n$.

c) Montrer que $\mathscr{Z}[(n+1)(-1)^n] = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$

d) Détreminer la solution de l'équation recurrente linéaire :

$$y_{n+1} + 2y_n + y_{n-1} = 0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \text{ avec } y_0 = 1.$$

4.8. – Signal échantillonné –

Soit $f(t)$ le signal défini sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t + 1$.

a) Représenter graphiquement le signal discret défini par l'échantillonnage de f à la période $T_e = 1/2$.

b) Calculer les transformées en z des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ obtenues par échantillonnage à la cadence $T_e = 1/2$ des signaux $f(t)U(t)$, $f(t)U(t-1)$ et $f(t-1)U(t-1)$.