IUT GEII | Université Rennes 1
Ma32 - Mathématiques pour le signal discret | Automne 2007

TD n°3 : Séries entières

3.1. Développer en séries entières puis donner le rayon et le domaine complexe de convergence de

$$f_1(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}, \quad f_2(x) = \sin^2 x, \quad f_3 = \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$f_4(x) = \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}, \quad f_5(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad f_6(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

3.2. Donner le rayon de convergence et la somme des séries suivantes

$$\textbf{a)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}, \qquad \textbf{b)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}, \qquad \textbf{c)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

3.3. Calculer à l'aide des séries entières une valeur approchée a 10^{-3} près de

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad I_2 = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

3.4. Donner sous forme de série entière la solution de chacune des équations différentielles suivantes passant par la condition initiale indiquée. Calculer ensuite sa somme.

(E_1) $\quad y' + 2xy = 0$ avec $y(0) = 1$.

(E_2) $\quad xy' - y = \frac{x^2}{1+x}$ avec $y'(0) = 0$.

(E_3) $\quad xy'' + 2y' + xy = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

3.5. Considérons l'équation de Bessel d'ordre n :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

On se place dans le cas $n = 0$.

1°) Donner l'équation récurrente double *à coefficient non constant* satisfaite par les coefficients $(a_n)_n$ d'une solution série entière.

2°) Vérifier que la solution valant 1 en 0 peut s'écrire sous la forme

$$J_0(x) = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2^p p!)^2} x^{2p}.$$