IUT GEII — Université Rennes 1
Ma32 - Mathématiques pour le signal discret — Automne 2009

TD n°2 : Séries numériques

2.1. Calculer les sommes des séries de terme général u_n :

a) $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$, **b)** $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$, **c)** $u_n = \ln \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$, **d)** $u_n = \dfrac{\cos \frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

2.2. Écriture décimale d'un nombre rationnel
Soit le nombre $A = 3,21212121\ldots$ dans le système décimal. Une écriture équivalente de A est :

$$A = 3 + \frac{21}{100} + \frac{21}{100^2} + \frac{21}{100^3} + \ldots$$

a) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{21}{100^n}$.

b) En déduire l'écriture de A sous forme de fraction irréductible.

2.3. Étudier la nature des séries de terme général u_n :

a) $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$, **b)** $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$ **c)** $u_n = \dfrac{n-1}{n^4+n+1}$, **d)** $u_n = \sin \dfrac{1}{2^n}$,

e) $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$, **f)** $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$, **g)** $u_n = \dfrac{1}{n(n+\ln n)}$.

2.4. Soit la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

On pose $d_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer que $d_n \sim \frac{-1}{2n^2}$ et en déduire que la suite (u_n) est convergente.

Remarque : La limite γ de (u_n) est appelée constante d'Euler et vaut approximativement 0,5772157.

2.5. Étudiez les séries de terme général u_n et préciser si elles convergent absolument :

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, **b)** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} \ln n$, **c)** $u_n = \sin\left((n + \dfrac{1}{n})\pi\right)$.

2.6. Montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$ est alternée. Exprimer u_n en fonction de u_0 puis calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.