IUT GEII — Université Rennes 1
Ma32 - Mathématiques pour le signal discret — Automne 2009

TD n°1 : Suites numériques

1.1. Variations

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$.

a) Est-elle croissante ou décroissante ?

b) Donnez un nombre N tel que pour $n > N$ la suite des u_n soit monotone.

c) Cette suite converge-t-elle ? Si oui donnez sa limite.

1.2. Convergence.

Étudiez la convergence et éventuellement la limite des suites de terme général :

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$, **b)** $u_n = \dfrac{n^2-2}{2n+1}$, **c)** $u_n = \dfrac{n-2}{2n^2+1}$,

d) $u_n = 1 + \dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$, **e)** $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, **f)** $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1.3. Suite récurrente linéaire.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence :

$$u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + 1 \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

a) Montrez que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

b) Donnez une interprétation graphique. Calculez sa limite $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c) Considérons la suite des différences $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$d_n = u_n - u_{n-1}.$$

Montrez que cette suite est géométrique.

d) Calculez d_n en fonction de d_1 puis $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$

e) Donnez l'expression de u_n en fonction de n.

1.4. Suite récurrente non linéaire.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence à partir de $u_0 = \frac{3}{2}$ et de la relation

$$u_{n+1} = -\frac{1}{u_n} + 2$$

a) Illustrez graphiquement la relation entre u_{n+1} et u_n. (Vous commencerez par tracer le graphe de $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$.)
b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq u_n \leq 2$.
c) Montrez que (u_n) est décroissante et convergente.
d) Calculez la limite de (u_n).

1.5. Suites adjacentes.

Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

a) Montrez que les suites (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
b) Montrez qu'elles convergent vers la même limite ℓ.
c) Montrez que ℓ vaut $2,7$ à 10^{-1} près par défaut.

1.6. Suite divergente.

a) Montrez que $\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Déduisez-en que la suite (u_n), définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, est divergente.