IUT GEII — Université Rennes 1
Ma32 - Mathématiques pour le signal discret — Automne 2008

QCM n°2 : correction

- C'est juste un calcul :

$$\sum_{n=0}^{9} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^7} + \frac{1}{10^8} + \frac{1}{10^9} = 1,111111111.$$

- La somme à calculer est la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $\frac{1}{10}^0 = 1$. La raison étant strictement inférieure à 1, la série converge et sa somme est

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}.$$

- La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $\sigma_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ converge lorsque N tend vers l'infini. Or on a

$$S_N = \sigma_{N+2} - u_0 - u_1$$

La convergence de lune des deux suites implique la convergence de l'autre.

- La série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est une série téléscopique qui converge. (Calculez sa somme.) Mais la limite de $\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}$ lorsque n tend vers l'infini est 1.

- Le terme general de cette série est plus petit que $\frac{1}{n(n-1)}$ pour $n > 2$ et positif. Ce dernier est le terme général d'une série téléscopique convergente (c.f. cours). Le théorème de conparaison assure la convergence de $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$. – vous auriez pu (et dû) reconnaître une série de Riemann –

- C'est une série géométrique de raison 1/2 strictement plus petit que 1 en valeur absolue, elle est cdonc convergente. Sa somme vaut $\frac{1}{1-1/2} = 2$.

- On a l'équivalence $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Ce dernier est le terme général de la série harmonique qui diverge. Par comparaison, la série de terme général $\ln(fracn+1n)$ diverge aussi.

- C'est une série géométrique de raison e^{-x}. Elle converge si et seulement si $e^{-x} < 1$, c'est-à-dire $x < 0$.

- Si $x < 0$ elle converge vers $\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x-1}$.

- Cette série est une série alternée car pour $n \geq 2$ on a $n \leq 3(n-1)$ donc $\frac{n}{3^{n!}} \leq \frac{n-1}{3^{(n-1)!}}$. Son terme général décroit vers 0, elle donc convergente et sa somme est inférieur à son premier terme positif qui est 1/3.

- Si on prend $a_n = 1$ pour tout n et $b_n = -1 - \frac{1}{n^2}$ pour tout n alors les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ divergent (leurs termes généraux ne tendent pas vers 0) mais $\sum a_n - b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge.