IUT GEII | Université Rennes 1
Ma32 - Mathématiques pour le signal discret | Automne 2008

QCM n°1 : correction

• La suite de terme général $\frac{n^2+\ln n}{n^2+2}$ est équivalente lorsque n est grand au rapport des termes du numérateur et du dénominateur de plus haut degrés. Ici la suite est équivalente à 1, ce qui implique que la limite de la suite est 1.

• Les fonctions logarithme et exponentielle étant croissantes, la suite de terme général $\ln(n) + e^n - 1$ est croissante.

• Tout les termes de la suite sont inférieurs à 5, la suite est donc majorée par 5.

• La suite est périodique et non constante, on peut en extraire deux suites qui ne convergent pas vers la même valeur. Par exemple $F(5p) = 0$ pour tout p et $F(5p+1) = 0,5$ pour tout p. D'après le théorème des suites extraites, la suite ne peut pas être convergente.

• Le fait que $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1+\frac{1}{n})$, que la fonction inverse soit décroissante et que la fonction logarithme soit croissante implique la décroissance de la suite.

• En calculant le logarithme de la suite on a :

$$\ln\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right] = n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n\frac{-2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -2.$$

La fonction exponentielle étant continue en -2 on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \frac{1}{e^2}$.

• Si la suite définie par récurrence à partir de $u_0 = 1$ par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ converge, elle converge vers ℓ vérifiant $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$. Ceci est impossible.

• La suite (v_n) vérifie $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n^2}$. Si elle converge c'est vers 0. Elle converge effectivement car cette suite est décroissante et positive :

$$0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1+v_n^2} \leq 1.$$

• Le suite définie par $I_n = \int_{1/2}^1 x^n dx$ est décroissante car pour x entre 1/2 et 1, $x^{n+1} \leq x^n$.

• La suite ci-dessus converge vers un nombre positif car elle est décroissante et positive.
On peut remarquer de plus que cette limite est zéro.

1. Première méthode : pour tout nombre $\epsilon > 0$ on a

$$\int_{1/2}^1 x^n dx = \int_{1/2}^{\epsilon^{1/n}} x^n dx + \int_{\epsilon^{1/n}}^1 x^n dx \leq \frac{1}{2}\epsilon + (1-\epsilon^{1/n})$$

en utilisant deux fois l'inégalité de la moyenne. Si $n \to \infty$ on a $\epsilon^{1/n} \to 1$ la limite est donc inférieure ou égale à $\frac{1}{2}\epsilon$ et ceci pour tout nombre strictement positif ϵ. Cette limite est donc nulle.

2. Deuxième méthode : $\displaystyle\int_{1/2}^1 x^n dx = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$