Mathématiques pour le signal discret – Ma32

Guy Casale

IRMAR bât 21 Beaulieu
http://perso.univ-rennes1.fr/guy.casale/

Référence

A First Course in Mathematical Analysis
David Brannan, Cambridge University Press

Mathématiques BTS-DUT Industriels
C. Larcher, M. Pariente, J.-C. Roy, Techniplus

Texte élaboré à partir des notes de Louis-Marie Le Ny et Virginie Bouteloup
– contient des erreurs de frappe —

Plan du cours

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

Plan du cours

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

1 - Quelques définitions.

Définition

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (suite réelle) ou $\mathbb{C}$ (suite complexe) qui à un entier n associe un nombre u_n.

Une suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) et u_n est appelé le terme général de la suite.

Cette notation est une abréviation de $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots)$.

Exemples

- *Les décimales d'un nombre : l'écriture de π est $(3, 1, 4, 1, 5, \ldots)$.*
- *Suites définies à partir d'une formule f en prenant les valeurs de f en les entiers : Si $f(x) = \dfrac{x^2 + e^{\sin x}}{\sqrt{|x|} - \pi}$, f définit une suite $u_n = f(n)$.*
- *Suites constantes $u_n = c \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(c, c, c, c, c, \ldots)$.*

Nous verrons d'autres exemples dans la suite du cours.

Définitions
Une suite réelle (u_n) est dite

- **majorée** *s'il existe un nombre M tel que $u_n \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- **minorée** *s'il existe un nombre m tel que $m \le u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- **bornée** *si elle est minorée et majorée,*
- **croissante** *si $u_n \le u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- **décroissante** *si $u_{n+1} \le u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- **monotone** *si elle est croissante ou décroissante.*

Remarque
Une suite (v_n) de nombres complexes ne peut pas être qualifiée de décroissante ou décroissante. Les suites

- $(\Re e v_n)$ *des parties réelles,*
- $(\Im m v_n)$ *des parties imaginaires ou*
- $(|v_n|)$ *des modules*

peuvent être croissantes, décroissantes, bornées, . . .

Exemple

Démontrez par réccurence que

$$Sc(n) = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

1. $Sc(1) = 1 = \frac{1}{6}(1.2.3)$, *la propriété est vraie au premier rang.*
2. *Supposons que* $Sc(n-1) = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ *alors*

$$\begin{aligned} Sc(n) &= Sc(n-1) + n^2 = \tfrac{1}{6}((n-1)n(2n-1) + 6n^2) \\ &= \tfrac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Deux caractérisations de la variation d'une suite :

- Une suite réelle (u_n) est croissante (resp. décroissante) si et seulement si la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ est toujours positive (resp. négative).
- Une suite réelle (u_n) de nombres strictement positifs est croissante (resp. décroissante) si et seulement si la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est minoré (resp. majoré) par 1.

Démonstration par récurrence
Pour montrer que qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \ge n_0$:

1. *On montre que la propriété est vraie au rang n_0 i.e. $P(n_0)$ est vraie.*
2. *On montre que si pour n fixé, $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ l'est aussi i.e. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.*

2 - Limites & convergence

Définition
On dit qu'une suite (u_n) **tend (ou converge) vers** *un nombre ℓ si pour toute précision ε il existe un rang N tel que pour $n \ge N$ les nombres u_n soient à une distance ε de ℓ :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \ge N \Rightarrow |u_n - \ell| \le \varepsilon$$

Exemple
Montrons qu'à partir d'un certain rang la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est plus petit que 10^{-10}.

S'il existe, le nombre ℓ est appelé la **limite** de la suite (u_n) et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

S'il n'existe pas on dit que la suite **diverge**.

Théorème

- *Si la limite existe elle est unique.*
- *Une suite convergente est bornée.*
- *Si (u_n) et (v_n) vérifient $u_n = v_n$ lorsque $n > p$ alors (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge*
- *S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+q} = v_n$ pour tout n alors (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge*

Démonstration.

. . .

$\square$

Exemples

- *La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.*
- *La suite constante $u_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers a.*
- *La suite de terme général $u_n = n^2$ ne converge pas.*
- *La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ ne converge pas.*

3 - Règles opératoires sur les limites.

a. Combinaisons linéaires.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

b. Produits et quotients.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$
Si de plus les v_n ainsi que ℓ' sont non nuls alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell'}$.

c. Composé par une fonction continue.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si f est une fonction continue en ℓ alors

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

Théorème

Toute suite croissante et majorée est convergente.
(Toute suite décroissante et minorée est convergente.)

Démonstration.

Soit (u_n) une suite réelle croissante majorée. Notons ℓ le plus petit des majorants. Nous allons montrer que la suite tend vers ℓ.

Nous ne prouverons pas que ℓ existe ici, c.f. la référence et/ou un autre livre.

Prenons un $\varepsilon > 0$.
Comme ℓ est le plus petit majorant de la suite, il existe un nombre u_N tel que

$$\ell - \varepsilon \leq u_N \leq \ell.$$

La suite étant croissante et majorée par ℓ on a

$$N \leq n \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \ell.$$

On a bien $n \geq N \quad \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

$\square$

4 - Suites classiques.

a. Suites arithmétiques.

Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est définie par récurrence par $u_{n+1} = u_n + r$.
On démontre (par récurrence) que $u_n = u_0 + nr$.

- Si $r = 0$, la suite est constante, tous les termes valent u_0.
- Si $r > 0$, la suite est croissante mais n'est pas majorée.
- Si $r < 0$, la suite est décroissante mais elle n'est pas minorée.

La somme des n premiers termes d'un suite arithmétique vaut :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n &= \sum_{i=0}^{i=n} u_i = \sum_{i=0}^{i=n} u_0 + ir \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} u_0 + r\sum_{i=0}^{i=n} i \\ &= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

b. Suites géométriques.

Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est définie par récurrence par $u_{n+1} = qu_n$.
On démontre (par récurrence) que $u_n = q^n u_0$.

Si $u_0 = 0$ tous les termes de la suite sont nuls. Sinon plusieurs cas se présentent :
- Si $q = 0$ la suite est constante égale à 0 à partir du second terme.
- Si $q = 1$ la suite est constante, tous le termes valent u_0.
- Si $q = -1$ la suite est vaut alternativement u_0 et $-u_0$.
- Si $|q| > 1$ La suite ne converge pas.
- Si $|q| < 1$ La suite converge vers 0.

La somme des n premiers termes d'un suite geométique vaut :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n &= \textstyle\sum_{i=0}^{i=n} u_i = \sum_{i=0}^{i=n} q^i u_0 \\ &= u_0 \textstyle\sum_{i=0}^{i=n} q^i \\ &= u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

c. Suites adjacentes.

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** *si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$*

Proposition

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite.

Démonstration.

...
$\square$

Exemple

Étudions la convergence des suites $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ *et* $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$.

On peut calculer la limite de ces suites, elles tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$.

d. Suites extraites.

Définition

Étant donnée une suite (u_n), une suite (v_n) est extraite de (u_n) s'il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\phi(n)}$.

Exemple

Si (u_n) est une suite, les suites $v_n = u_{n^2}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont des suites extraites de (u_n)

Théorème

Si une suite (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration.

...
$\square$

Exemple

La suite $u_n = (-1)^n$ ne converge pas car les suites extraites $v_n = u_{2n} = 1$ et $w_n = u_{2n+1} = -1$ ne convergent pas vers la même limite.

e. Suites définies par récurrence.

Définition

Une suite réelle (ou complexe) (u_n) est définie par récurrence à partir de son premier terme u_0 s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Si f est continue et si la suite (u_n) définie à partir de u_0 par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ alors $\ell = f(\ell)$.

Démonstration.

...
$\square$

Représentation graphique. (la suite $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$)

Exemple (l'application logistique)

Fixons un paramètre $1 < r < 4$ et considérons la suite donnée par $0 < u_0 < 1$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) = ru_n(1 - u_n)$$

Montrons par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$.
Si la suite a une limite celle-ci vaut ...

Si $1 < r < 3$ la suite converge effectivement vers $\frac{r-1}{r}$.
Pour $r > 3$ le comportement de la suite est plus chaotique.
(c.f `http ://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map`)

Exemple

Trouvons une formule pour calculer le terme général de la suite définie par

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

à partir de $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

e. Suites définies par une récurrence double.

Définition

Une suite réelle (ou complexe) (u_n) est définie par récurrence double à partir de ses deux premiers termes u_0 et u_1 s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) telle que $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Regardons les suites réelles définies par une récurrence double linéaire :

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \text{ avec } a \neq 0.$$

L'équation

$$ar^2 + br + cb = 0 \qquad \text{(C)}$$

s'appelle **l'équation caractéristique** associé, notons $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta > 0$ alors $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1 et r_2 sont les deux racines de (C).
- Si $\Delta = 0$ alors $u_n = (\lambda n + \mu)r^n$ où r est la racine double de (C).
- Si $\Delta < 0$ alors $u_n = (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)\rho^n$
où $r_1 = \overline{r_2} = \rho e^{i\theta}$ sont les deux racines de (C).

Mathématiques pour le signal discret – Ma32

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

Exemples

- *Série géométrique de raison plus petite que 1 : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.*
  Les sommes partielles valent

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1-(1/2)^{N+1}}{1-1/2}.$$

  C'est une série convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$

- *Série géométrique de raison plus grande que 1 : $u_n = 2^n$.*
  Les sommes partielles valent

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 2^n = \frac{1-2^{N+1}}{1-2}.$$

  C'est une série divergente.

1 - Définitions et notations.

Définitions

Soit u_n une suite numérique. La suite (S_N) de terme général

$$S_N = u_0 + u_1 + \ldots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

est appelée **série** *de terme général u_n.*

S_N est la **somme partielle d'ordre** *N. On notera $\sum u_n$ la série de terme général u_n.*

Définitions

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Elle est dite convergente si la suite des sommes partielles (S_N) converge vers un nombre S.

Dans ce cas S est appelé **somme** *de la série et est noté* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$,

et $R_N = S - S_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ *est le* **reste d'ordre** *N de la série.*

Une série non convergente est dite divergente.

2- Premières propriétés

Proposition

Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration.

On a $u_N = S_N - S_{N-1}$ donc

$$\lim_{N\to+\infty} u_N = \lim_{N\to+\infty} S_N - \lim_{N\to+\infty} S_{N-1} = S - S = 0.$$

$\square$

Remarque

Cette proposition n'est pas utile pour prouver qu'une série converge mais seulement pour prouver qu'une série diverge.

Exemples

- *La série géométrique de raison q : $\sum q^n$ diverge lorsque $|q| \geq 1$.*

- La série harmonique : $\sum \frac{1}{n}$.
  Le terme général tend vers 0 mais la série diverge.

  Les sommes partielles sont $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Considérons la suite extraite : $T_N = S_{2^N}$. On a alors

$$T_{N+1} - T_N = \sum_{n=1}^{2^{N+1}} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} = \sum_{n=2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{1}{n}$$
$$\geq 2^N \times \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2}.$$

  La suite extraite (T_N) diverge, la suite (S_N) est donc aussi divergente :

  la série harmonique diverge.

Voir aussi l'exercice 6 du TD 1
Interprétation physique sur `http://www.etudes.ru (/ru/mov/mov006/index.php)`

Séries téléscopiques

Exemple

Les sommes partielles de la série $\sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ se calculent facilement.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) &= \textstyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} \\
&= 1 - \frac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

Calculons la somme de $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Fixons $p \in \mathbb{N}_{>0}$. Que pouvez-vous dire de la série $\sum \frac{1}{n(n+p)}$?

Séries géométriques

La série géomérique de premier terme a et de raison q est

$$\sum aq^n.$$

Théorème

- *Si $|q| < 1$ la série $\sum aq^n$ converge vers $\frac{a}{1-q}$.*
- *Si $|q| \geq 1$ et $a \neq 0$ la série $\sum aq^n$ est divergente.*

Démonstration.

- c.f. le cours sur les suites - □

Exemple

Montrons que $0,33333\ldots = \frac{1}{3}$.

Opérations sur les séries

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration.

... □

Remarques

- *Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n + v_n$ diverge.*
- *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors on ne sait rien sur $\sum u_n + v_n$.*
  Considérez $u_n = 1/n$ et $v_n = -1/n$.
- *La série produit $\sum u_n v_n$ n'a pas pour somme $(\sum u_n)(\sum v_n)$.*
  Considérez $u_n = (1/2)^n$ et $v_n = (1/3)^n$.

Théorème

- *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ vérifient $u_n = v_n$ lorsque $n > p$ alors*
  $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge
- *S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+q} = v_n$ pour tout n alors*
  $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge

Démonstration.

- Si $N > p$ on a
$$\sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{p} u_n - v_n = A.$$
  Les sommes partielles vérifient $\sum_{n=0}^{N} u_n = A + \sum_{n=0}^{N} v_n$. et sont donc de même nature.
- On a
$$\sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N-q} v_n = \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N-q} u_{n+q} = \sum_{n=0}^{q} u_n = B.$$
  Les suites des sommes partielles sont donc de même nature.

□

Théorèmes de comparaison

Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Démonstration.

. . .

□

Exemple

Montrons que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

3- Séries à termes positifs

Ce sont les séries $\sum u_n$ avec $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Une série à terme positifs $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Démonstration.

Condition suffisante : La suite (S_n) des sommes partielles est croissante car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. Si de plus elle est majorée alors elle converge (c.f. cours sur les suites).

Condition nécessaire : Si la suite des sommes partielles (S_n) converge, elle est majorée (c.f. cours sur les suites).

□

Théorèmes de comparaison

Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Rappel

$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *si* $\frac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Démonstration.

. . .

□

Exemple

Montrons que la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$ diverge.

Critère de d'Alembert

Théorème
Soit $\sum u_n$ une série à terme positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- *Si $\ell < 1$, la série converge,*
- *Si $\ell > 1$, la série diverge.*

Démonstration.
...
$\square$

Exemple
Montrons que la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge.

Comparaison avec une intégrale

Théorème
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continue et décroissante.
La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Démonstration.
...
$\square$

Exemple (Séries de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont appelées séries de Riemann.

Montrons qu'une série de Riemann converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Critère de Cauchy

Théorème
Soit $\sum u_n$ une série à terme positifs telle que $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- *Si $\ell < 1$, la série converge,*
- *Si $\ell > 1$, la série diverge.*

Démonstration.
...
$\square$

Exemple
Montrons que la série $\sum \frac{1}{n^n}$ converge.

4- Séries à termes réels

Définition
Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** *si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème
Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente alors elle converge.

Démonstration.
...
$\square$

Exemple
Montrons que la série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ converge.

Séries alternée

Définition

*Une série $\sum u_n$ est dite **alternée** si ces termes sont alternativement positifs et négatifs.*

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si $|u_n|$ décroit et tend vers 0 alors la série $\sum u_n$ est convergente. Plus précisement,

$$|R_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right| \leq |u_{N+1}|.$$

Démonstration.

...

□

Exemple

Montrons que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

La série $\sum z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

Proposition

- *Si $|z| \geq 1$ la série $\sum z^n$ est divergente.*
- *Si $|z| < 1$ la série $\sum z^n$ converge absolument et sa somme vaut*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Exemple

Calculons les sommes des deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ avec

$$a_n = \frac{\cos n\theta}{2^n} \text{ et } b_n = \frac{\sin n\theta}{2^n}.$$

5- Séries à termes complexes

Proposition

Une série à termes complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries à termes réels $\sum \Re e(u_n)$ et $\sum \Im m(u_n)$ convergent.

Définition

*Une série à termes complexes $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème

Si $\sum u_n$ est une série à termes complexes absolument convergente alors elle converge.

Démonstration.

...

□

Mathématiques pour le signal discret – Ma32

1 - Définitions et notations.

Définition
Une série entière est une série $\sum a_n x^n$ où x est un nombre réel ou complexe et a_n est le terme général d'une suite de nombres réels ou complexes.

Ce sont des sommes infinies de puissances de x. Elles généralisent donc les polynômes.

Exemples
- *Si $a_n = 0$ lorsque $n > p$ alors $\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$.*
- *Si $a_n = 1$ pour tout n alors $\sum x^n$ est une série géométrique.*

Remarque
Si $|x| < 1$ la série $\sum x^n$ est une fonction de x que vous connaissez :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Lemma
Si la série $\sum a_n X^n$ converge et $|x| < |X|$ alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.

Démonstration.
...

$\square$

Théorème
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Il existe un unique nombre $R \geq 0$, éventuellement infini, tel que :
- *si $|x| < R$, la série converge absolument,*
- *si $|x| > R$, la série diverge.*

Ce nombre est appelé le rayon de convergence de la série.

Démonstration.
...

$\square$

Définition
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. L'ensemble des x tels que $|x| < R$ est le domaine de convergence de la série.
Si on travaille avec des nombres réels, c'est un intervalle.
Si on travaille avec des nombres complexes, c'est un disque.

Exemples
- *Le rayon de convergence de la série réelle $\sum x^n$ est 1 car ...*
  Le domaine réel de convergence de cette série est $]-1,1[$.
  Elle ne converge que pour $x \in]-1,1[$.
- *Le rayon de convergence de la série réelle $\sum \frac{x^n}{n}$ est 1 car ...*
  Le domaine réel de convergence de cette série est $]-1,1[$.
  Par contre elle converge pour $x \in [-1,1[$.
- *Le rayon de convergence de la série réelle $\sum \frac{x^n}{n^2}$ est 1 car ...*
  Le domaine réel de convergence de cette série est $]-1,1[$.
  Par contre, elle converge pour $x \in [-1,1]$.

Définition

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Notons D_R son domaine de convergence. La somme de la série $\sum a_n x^n$ est une fonction de x, $f : D \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans certain cas on peut calculer cette somme

Exemples

- *La somme de la série* $\sum x^n$ *est* $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ *pour* $x \in]-1,1[$.
- *La somme de* $\sum \frac{x^n}{n}$ *est* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$ *pour* $x \in]-1,1[$.
- *La somme de* $\sum \frac{x^n}{n^2}$ *est* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = ??$ *pour* $x \in]-1,1[$.

Exemples

- *La série réelle* $\sum \frac{1}{n!} x^n$.

  Critère de d'Alembert : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

  Le domaine de convergence de cette série est $\mathbb{R}$.
  Sa somme est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La connaissez-vous ?
- *La série réelle* $\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

  Critère de Cauchy : $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$

  Le domaine de convergence de cette série est $]-e,e[$.
  Sa somme est une fonction $g :]-e,e[\to \mathbb{R}$. La connaissez-vous ?

2 - Détermination du rayon de convergence

- **Critère de d'Alembert**
  Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \neq 0$
  alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$.
- **Critère de Cauchy**
  Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \neq 0$
  alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$.

Démonstration.

- c.f. cours sur les séries numériques - □

Remarques

- Le critère de d'Alembert ne s'applique que si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
- Si $\ell = 0$ alors $R = +\infty$, si $\ell = +\infty$ alors $R = 0$.

3 - Opérations sur les séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 et de somme $f_1(x)$ et $f_2(x)$ respectivement.

a - Combinaisons linéaires

Proposition

Si λ_1 et λ_2 sont deux nombres, la série $\sum(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n$ a un rayon de convergence R tel que
- $R = min(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$,
- $R \geq R_1$ si $R_1 = R_2$.
La somme de $\sum(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n$ est

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x).$$

Démonstration.

- c.f. le cours sur les suites- □

b - Multiplication

Proposition

Le produit de deux série entiˋere est une série entière :

$$\left(\sum a_n x^n\right) \times \left(\sum b_n x^n\right) = \sum c_n x^n$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
Le rayon de convergence R *de cette série entière vérifie* $R \geq min(R_1, R_2)$.

Démonstration.

...

$\square$

Exemple

Calculons la série $\sum x^n \times \sum nx^n$.

Démonstration.

...

$\square$

Exemples

- *Calculons la somme de la série entière* $\sum (n+2)x^n$.
- *Calculons* $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

4 - Propriétés de la somme

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *et* $f(x)$ *la fonction définie par la somme de cette série.*

- f *est continue sur* $]-R, R[$ *et pour tout* $[a, b] \subset]-R, R[$,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

- f *est dérivable sur* $]-R, R[$ *et sa dérivée est obtenue comme la somme*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ pour tout } x \in]-R, R[$$

- f *a pour primitive valant* 0 *en* 0 *la somme*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} dx.$$

5 - Développement en série entière

Définition

Soit $\mathscr{D}$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *ou un disque de* $\mathbb{C}$ *contenant* 0. *Une fonction* $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *(resp.* $\mathbb{C}$*) est dite développable en série entière en* 0 *s'il existe une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$ *telle que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ pour tout } |x| < R.$$

Si elle existe cette série est unique et coïncide avec la série de Taylor de f *en* 0.

Exemples

- *La fonction (réelle ou complexe)* $f(x) = e^x$ *est la somme de la série* ...
- *La fonction réelle* $g(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ *prolongée par* $g(0) = 0$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *mais n'est pas developpable en série entière.*

Développements en série entière de fonctions usuelles

Fonction		Série	Rayon de convergence
$\frac{1}{1-x}$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
e^x	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\cos x$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sin x$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\cosh x$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sinh x$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$(1+x)^\alpha$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x)$	$=$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$R = 1$
$\vdots$			

Applications

- Quel est le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?
- Calculons à 10^{-3} près

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$$

- Trouvons une solution de l'équation différentielle

$$2xy'' + 2y' - y = 0$$

telle que $y(0) = 1$ sous forme de série entière.

6 - Séries de Laurent

Définition

Une série de Laurent est une série de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\leq -1} a_n x^n.$$

C'est la somme d'une série entière et d'une série entière en x^{-1}.

Réécrivons la série :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n = \underbrace{\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n}_{\text{Converge si } |x|<R_1} + \underbrace{\sum_{n\geq 1} a_{-n}\, x^{-n}}_{\text{Converge si } |x^{-1}|<R_2} .$$

Pour que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$ converge il faut que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} a_{-n}\, x^{-n}$ convergent, c'est-à-dire

$$\frac{1}{R_2} < |x| < R_1.$$

Exemples

- *Calculons le domaine de convergence réel et le domaine de convergence complexe ainsi que la somme de la série de Laurent*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$$

avec

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} \text{ si } n \geq 0 \\ n^{-1} \text{ si } n \leq -1 \end{cases}.$$

- *Que se passe-t-il avec la série de Laurent*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n x^n$$

donnée par

$$b_n = \begin{cases} 2^{n} \text{ si } n \geq 0 \\ n^{-1} \text{ si } n \leq -1 \end{cases} \quad ?$$

Développement en série de Laurent

- Calculons les développements en série de Laurent de la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

suivant que $|x| < 1$ ou $|x| > 1$.

- Calculons le développement en série de Laurent de la fonction

$$g(x) = e^{2/x} - \cos 3x.$$

Mathématiques pour le signale discret – Ma32

1 - Définitions et notations.

Définition

La transformée en z d'une suite $(a_n)_n$ est la somme de la série :

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{z^n}.$$

Si le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$ est $R > 0$ alors $A(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left|\frac{1}{z}\right| < R$ soit $|z| > \frac{1}{R}$.

Le fonction $A(z)$ est aussi notée $\mathscr{Z}[a_n]$.
On appelle $(a_n)_n$ l'original de $A(z)$.

Exemple

Si $a_n = 1$ pour tout n alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^n}$ est 1.
Pour $z > 1$ on a

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - 1/z} = \frac{z}{z-1}.$$

2 - Exemples fondamentaux.

a. Échelon unité :

Le signal est

$$U(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Son échantillonage à la période T_e est la suite de terme général

$$U(nT_e) = 1.$$

Sa transformée en z :

$$\mathscr{Z}[U(nT_e)] = \sum_{n=0}^{+\infty} U(nT_e)\,\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{z}{z-1}$$

pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

Définition

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction nulle sur $\mathbb{R}_{<0}$ (signal causal) et $T_e \in \mathbb{R}_{>0}$. L'échantillonnage de f de période T_e est la suite

$$(f(nT_e))_n = (f(0), f(T_e), f(2T_e), f(3T_e), \ldots)$$

La transformée en z d'un échantillonage $(f(nT_e))_n$ est la somme de la série :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)\,\frac{1}{z^n}.$$

lorsqu'elle existe.
On la note $F(z)$, $\mathscr{Z}[f(nT_e)]$ ou $\mathscr{Z}[f]$ si T_e est explicite.

Exemple

b. Suite de Dirac :

La suite est définie par

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 1 \\ \delta(nT_e) &= 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}_{>0}. \end{aligned}$$

Sa transformée en z :

$$\mathscr{Z}[\delta(nT_e)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(nT_e)\,\frac{1}{z^n} = \delta(0)\frac{1}{z^0} = 1$$

c. Suite exponentielle :

Le signal est
$$f(t) = a^t = \exp(t \ln a).$$
Son échantillonage à la période T_e est la suite de terme général
$$f(nT_e) = a^{nT_e}.$$

Sa transformée en z :
$$\mathscr{Z}[a^{nT_e}] = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{nT_e} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^{T_e}}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a^{T_e}}{z}} = \frac{z}{z - a^{T_e}}$$
pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left|\frac{a^{T_e}}{z}\right| < 1$ *i.e.* $|z| > |a|^{T_e}$.

En particulier
$$\mathscr{Z}[a^n] = \frac{z}{z-a} \text{ pour } |z| > |a|.$$

b. Retard

Théorème (du retard)

Soit $(v_n)_n$ une suite ; notons $(w_n)_n$ la suite donnée par
$$\begin{array}{lcll} w_n & = & v_{n-p} & \text{si } n \geq p > 0 \\ w_n & = & 0 & \text{si } n < p \end{array}.$$
Alors
$$\mathscr{Z}[w_n] = \frac{1}{z^p} \mathscr{Z}[v_n].$$

Démonstration.
. . . □

L'égalité du théorème de réécrit
$$\mathscr{Z}[U(n-p)v_{n-p}] = z^{-p} \mathscr{Z}[v_n].$$

3 - Propriétés.

a. Linéarité

Théorème

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites et λ, μ deux nombres. Alors
$$\mathscr{Z}[\lambda u_n + \mu v_n] = \lambda \mathscr{Z}[u_n] + \mu \mathscr{Z}[v_n].$$

Démonstration.
. . . □

Exemples

Calculons $\mathscr{Z}[\cos(\omega n)]$ et $\mathscr{Z}[\sin(\omega n)]$.

c. Avance

Théorème (de l'avance)

Soit $(v_n)_n$ une suite ; notons $(w_n)_n$ la suite donnée par $w_n = U(n)v_{n+1}$. Alors
$$\mathscr{Z}[w_n] = z(\mathscr{Z}[v_n] - v_0).$$

Démonstration.
. . . □

On peut généraliser ce théorème par récurrence :
$$\mathscr{Z}[U(n)v_{n+p}] = z^p \left(\mathscr{Z}[v_n] - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{v_k}{z^k} \right).$$

d. Multiplication par n.

Proposition

Soit $(v_n)_n$ une suite. Alors $\mathscr{Z}[nv_n] = -z\dfrac{d}{dz}\mathscr{Z}[v_n].$

Démonstration.

. . . □

e. Multiplication par a^n, $a \in \mathbb{C}$.

Proposition

Soit $(v_n)_n$ une suite. Alors $\mathscr{Z}[a^n v_n](z) = \mathscr{Z}[v_n]\left(\dfrac{z}{a}\right).$

Démonstration.

. . . □

5 - Valeur initiale et valeur finale

Théorème (de la valeur initiale)

Soit $(a_n)_n$ une suite et $A(z)$ sa transformée en z. Si la limite existe on a :

$$\lim_{|z|\to+\infty} A(z) = a_0.$$

Démonstration.

. . . □

Théorème (de la valeur finale)

Soit $(a_n)_n$ une suite et $A(z)$ sa transformée en z. Si les limites existent on a :

$$\lim_{|z|\to0^+} A(z)\left(1-\frac{1}{z}\right) = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Démonstration.

. . . □

4 -Transformée d'un signal périodique

Théorème

Soient $T_e \in \mathbb{R}_{>0}$ et f un signal mT_e-périodique. Notons f_0 le signal

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, mT_e[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $$\mathscr{Z}[f(nT_e)] = \frac{z^m}{z^m-1}\mathscr{Z}[f_0(nT_e)],$$

ou avec d'autres notations : $$F(z) = \frac{z^m}{z^m-1}F_0(z).$$

pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

Démonstration.

. . . □

6 - Transformée en z et convolution

Rappels

1. *Si f et g sont deux fonctions nulles sur $\mathbb{R}_{<0}$, on note*
   $(f*g)(x) = \displaystyle\int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau$ *le* **produit de convolution** *de f et g.*
2. *Si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites, on note*
   $(a*b)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *le* **produit de convolution** *de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.*

Compatibilité

Soit T_e une période d'échantillonnage,
si $(a_n)_n$ est l'échantillonnage de f et $(b_n)_n$ est l'échantillonnage de g
alors $((a*b)_n)_n$ est l'échantillonnage de $(f*g)$.

Théorème

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites. On a

$$\mathscr{Z}[(a*b)_n] = \mathscr{Z}[a_n]\cdot\mathscr{Z}[b_n].$$

Soient f et g deux signaux casaux et $F(z)$ et $G(z)$ leurs transformées en z de période d'échantillonnage T_e. On a

$$\mathscr{Z}[f*g] = F(z)\cdot G(z)$$

Démonstration.

$$\mathscr{Z}[(a*b)_n] = \sum_{n=0}^{+\infty} (a*b)_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\frac{1}{z^n}$$

En remplaçant $n-k$ par m :

$$= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_m \frac{1}{z^{k+m}} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{1}{z^k}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m \frac{1}{z^m}\right)$$

Soit $A(z)$ une fonction d'une variable complexe z.
Existe-t-il $(a_n)_n$ telle que $A(z) = \mathscr{Z}[a_n]$?

Première méthode : Développer $A(z)$ en série entière de $\frac{1}{z}$ en utilisant les tables de séries entières.

Deuxième méthode : Si $A(z)$ est une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples puis on utilise les propriétés de la TZ et les tables de transformées usuelles.

Exemple (fin de l'exemple précédent)

Prenons $A(z) = \frac{z}{(z-1)(2z+1)} = z\left(\frac{1/3}{z-1} - \frac{2/3}{2z+1}\right) = \frac{1}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{3}\frac{z}{z+1/2}$.

Or d'après ce que nous avons déjà vu :

$$\mathscr{Z}[U(n)] = \frac{z}{z-1} \text{ et } \mathscr{Z}[(-1/2)^n U(n)] = \frac{z}{z+1/2}.$$

▸ voir l'exemple c.

Nous avons donc $\frac{z}{(z-1)(2z+1)} = \mathscr{Z}[a_n]$ *avec*

$$a_n = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right] U(n)$$

7 - Transformée inverse & Applications

Comment retrouver l'original d'une transformée en z ?

Exemple

On cherche une suite $(a_n)_n$ telle que $\begin{cases} 2a_{n+1} + a_n = U(n) \\ a_0 = 0 \end{cases}$.

La transformée en z étant linéaire on obtient

$$2\mathscr{Z}[a_{n+1}] + \mathscr{Z}[a_n] = \mathscr{Z}[U(n)]$$

Le théorème de l'avance donne

$$\mathscr{Z}[a_{n+1}] = z\left(\mathscr{Z}[a_n] - a_0\right),$$

et on a donc

$$2z\mathscr{Z}[a_n] + \mathscr{Z}[a_n] = \frac{z}{z-1} \text{ c'est-à-dire } \mathscr{Z}[a_n] = \frac{z}{(z-1)(2z+1)}.$$

Comment obtenir a_n ?

Suite définies par une récurrence double linéaire.

$$\alpha\ a_{n+2} + \beta\ a_{n+1} + \gamma\ a_n = b_n$$

α, β, γ étant des constantes et $(b_n)_n$ une suite données et $(a_n)_n$ est la suite inconnue.

En utilisant la linéarité et le théorème d'avance, on obtient

$$\mathscr{Z}[a_n] = \frac{\mathscr{Z}[b_n] + \alpha a_0 z^2 + (\alpha a_1 + \beta a_0)z}{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}$$

Reste à trouver $(a_n)_n$ ...

Exemple

Trouver une suite $(y_n)_n$ telle que $\begin{cases} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = \delta \\ y_0 = 1 \quad y_1 = 0 \end{cases}$.

Comparer avec l'exemple de la fin du chapitre sur les suites