Étude numérique de l'équation de Ricatti

$$x' = x^2 - t$$

La fonction Euler ci-dessous (`Euler.m`) permet de calculer les valeurs approchée des solutions de cette equations en utilisant la méthode d'Euler avec un pas de $0,4$.

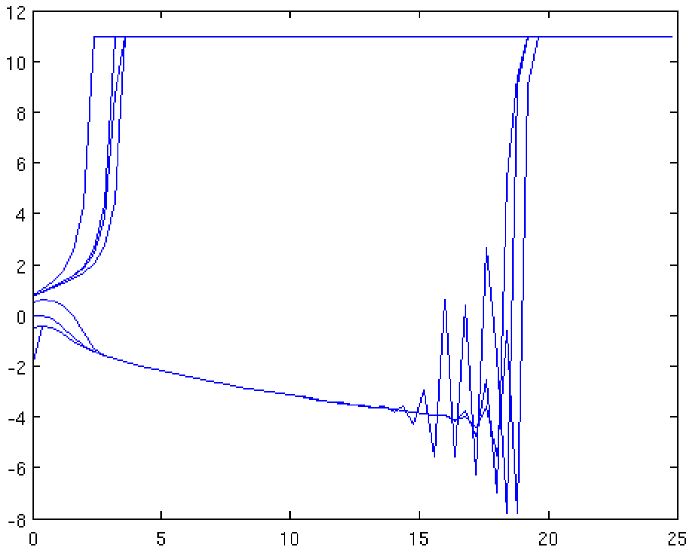
```
% fonction calculant la solution approche de l'equation de ricatti x" = x^2-t
% valant x0 en t0
% par le methode d'Euler

function M=Euler(t0,x0)

%les parametres
tmin=t0;
tmax=25;
pas=0.4;

%le maillage de l'intervalle de temps
t=tmin:pas:tmax;

%le nombre de noeuds du maillage.
S= size(t);
s=S(2);

% calcul des valeurs approchees par euler
x(1)=x0;
for i=2:s
      x(i)=x(i-1)+pas*(x(i-1)^2-t(i-1));
      % on coupe les valeurs trop grandes
      if x(i)>10
           x(i)=11;
      end

end

%On met les resultats dans une unique matrice M qui sortira les valeurs obtenues
M(:,1)=t;
M(:,2)=x;
```

Le script suivant (`script2.m`) trace quelques solutions approchées données par cette méthode.

```
%script pour caluler certaines solutions de la ricatti

%on nettoie le graphique
clf

% les differentes conditions initiales en t0=0
CI0=[0.8 , 0.73 , 0.7273, 0.72 , 0.5 , 0 , -0.5 , -2 ];

Z0=size(CI0);
```

```
z0=Z0(2);

%le calcul et le dessin des solutions issues de t0=0 et x0 dans CI0
for i=1:z0
      M=Euler(0,CI0(i));
      u=M(:,2);
      t=M(:,1);
      plot(t,u)
      hold on
end
```

On obtient



Solution approchées avec Euler et un pas de 0,4

Notez

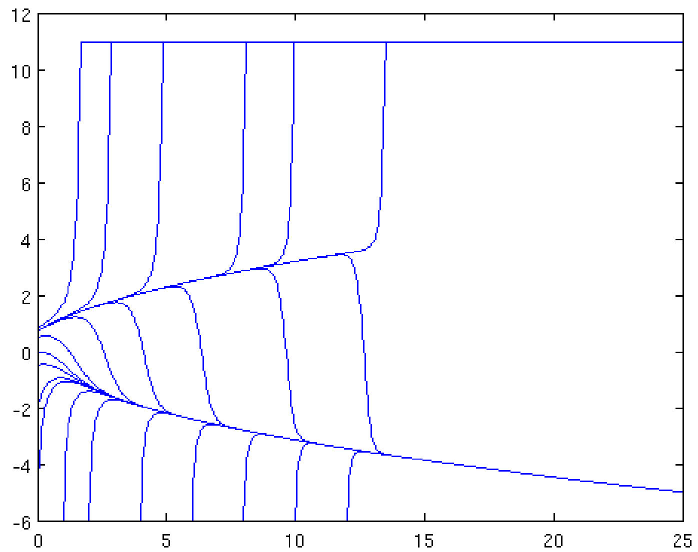
- la ligne en haut du graphique dû à la coupe que l'on effectue sur les grande valeurs de x,
- le comportement étrange des solution qui se mettent à osciller alors que l'étude graphique nous a montrer que ce n'était pas le cas des vrais solutions ; on a à faire a un phénomeène d'instabilité de la méthode numérique utilisée.

Modifions `Euler.m` de manière à utiliser un pas de $0,04$ et utilisons le script suivant (`script.m`).

```
%script pour caluler certaines solutions de la ricatti

%on nettoie le graphique
clf
% les differentes conditions initiales en t0=0
CI0=[0.8 , 0.73 , 0.72734 , 0.727338208159, 0.72733820815842170626197571437,
0.7273382081584217062619757143, 0.727338205 , 0.7273, 0.72 , 0.5 , 0 , -0.5 , -2 , -6];

Z0=size(CI0);
z0=Z0(2);
%le calcul et le dessin des solutions issur de t0=0 et x0 dans CI0

for i=1:z0
      M=Euler(0,CI0(i));
      u=M(:,2);
      t=M(:,1);
      plot(t,u)
```

```
        hold on
end

% rajoutons quelques solutions
% les differentes conditions initiales en x0=-6
T6=[0 ,1 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12];

Z6=size(T6);
z6=Z6(2);

%le calcul et le dessin des solutions issues de t0 dans T6 et x0=-6

for i=1:z6
        M=Euler(T6(i),-6);
        u=M(:,2);
        t=M(:,1);
        plot(t,u)
        hold on
end

% deux solution supplementaires
% les differentes conditions initiales en x0=9
CI9=[3.02714021,3.027140213];

Z9=size(CI9);
z9=Z9(2);
%le calcul et le dessin des solutions issues de t0=9 et x0 dans CI9

for i=1:z9
        M=Euler(9,CI9(i));
        u=M(:,2);
        t=M(:,1);
        plot(t,u)
        hold on
end
```

On obtient alors le graphique suivant :



Solution approchées avec Euler et un pas de 0,04