3 Séries entières

3.1 Définitions et notations.

Définition 1 *Une* **série entière** *est une série*

$$\sum a_n x^n$$

où x est un nombre réel ou complexe et a_n est le terme général d'une suite de nombres réels ou complexes.

Ce sont des sommes infinies de puissances de x. Elles généralisent les polynômes.

Exemples 1

- *Si $a_n = 0$ lorsque $n > p$ alors $\sum a_n x^n =$.*
- *Si $a_n = 1$ pour tout n alors $\sum x^n$ est une série géométrique.*

Remarque 1 *Si $|x| < 1$ la série $\sum x^n$ est une* **fonction** *de x et on peut la calculer :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \qquad .$$

Lemme 1 *Si la série $\sum a_n X^n$ converge et $|x| < |X|$ alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.*

Preuve. – Ceci est déjà démontré dans le cours sur les séries numériques. □

Théorème 1 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Il existe un unique nombre $R \geq 0$, éventuellement infini, tel que :*

- *si $|x| < R$, la série converge absolument,*
- *si $|x| > R$, la série diverge.*

Ce nombre est appelé le **rayon de convergence** *de la série.*

Preuve. – ... □

Définition 2 *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *L'ensemble des* x *tels que* $|x| < R$ *est le* **domaine de convergence** *de la série.*

Si on travaille avec des nombres réels, c'est un intervalle $]-R, R[$.

Si on travaille avec des nombres complexes, c'est un disque $D(0, R)$.

Exemples 2

- *Le rayon de convergence de la série réelle* $\displaystyle\sum x^n$ *est* 1 *car ...*

  Le domaine réel de convergence de cette série est $]-1, 1[$.
  Elle ne converge que pour $x \in]-1, 1[$.

- *Le rayon de convergence de la série réelle* $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n}$ *est* 1 *car ...*

  Le domaine réel de convergence de cette série est $]-1, 1[$.
  Par contre elle converge pour $x \in [-1, 1[$.

- *Le rayon de convergence de la série réelle* $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n^2}$ *est* 1 *car ...*

  Le domaine réel de convergence de cette série est $]-1, 1[$.
  Par contre, elle converge pour $x \in [-1, 1]$.

3.2 Détermination du rayon de convergence

– **Critère de d'Alembert**

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \neq 0$
alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$.

Preuve. –

□

– **Critère de Cauchy**

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \neq 0$
alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$.

Preuve. –

□

Remarques 1 - *Le critère de d'Alembert ne s'applique que si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.*
- *Si $\ell = 0$ alors $R = +\infty$, si $\ell = +\infty$ alors $R = 0$.*

Exemple 1 *La série réelle* $\sum \frac{1}{n!} x^n$.

Exemple 2 *La série réelle* $\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

3.3 Somme d'une série entière.

Définition 3 *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Notons* D *son domaine de convergence. La somme de la série* $\sum a_n x^n$ *est une fonction de* x, $f : D \to \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), définie par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans certain cas on peut calculer cette somme

Exemples 3

- *La somme de la série* $\sum x^n$ *est*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ pour } x \in]-1,1[.$$

- *La somme de* $\sum \frac{x^n}{n}$ *est*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \qquad\qquad\qquad \text{pour } x \in]-1,1[.$$

- *La somme de* $\sum \frac{x^n}{n^2}$ *est*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \qquad\qquad\qquad \text{pour } x \in]-1,1[.$$

3.4 Opérations sur les séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 et de sommes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ respectivement.

3.4.1 Combinaisons linéaires

Proposition 1 *Si λ_1 et λ_2 sont deux nombres, la série $\sum(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n$ a un rayon de convergence R tel que*

- $R = min(R_1, R_2)$ *si* $R_1 \neq R_2$,

- $R \geq R_1$ *si* $R_1 = R_2$.

La somme de $\sum(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n$ est

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x).$$

Preuve. – - c.f. le cours sur les séries- □

3.4.2 Multiplication

Proposition 2 *Le produit de deux série entière est une série entière :*

$$\left(\sum a_n x^n\right) \times \left(\sum b_n x^n\right) = \sum c_n x^n$$

avec $\boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.}$

Le rayon de convergence R de cette série entière vérifie $R \geq min(R_1, R_2)$.

Preuve. –

□

Exemple 3 *Le produit $\sum x^n \times \sum n x^n$ est la série entière suivante :*

3.5 Propriétés de la somme

Théorème 2 *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *et*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- f *est continue sur* $]-R, R[$ *et pour tout* $[a,b] \subset]-R, R[$,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx.}$$

- f *est dérivable sur* $]-R, R[$ *et sa dérivée est obtenue comme la somme*

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ pour tout } x \in]-R, R[.}$$

- f *a pour primitive valant* 0 *en* 0 *la somme*

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \text{ pour tout } x \in]-R, R[.}$$

Preuve. – ...

$\square$

Exemples 4

- *La somme de la série entière* $\sum(n+2)x^n$ *est la fonction suivante :*

- *La somme de la série entière* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ *est la fonction suivante :*

3.6 Développement en série entière

Définition 4 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un disque de $\mathbb{C}$ contenant 0. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est dite* **développable en série entière en** 0 *s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ pour tout } |x| < R.$$

Si elle existe cette série est unique et coïncide avec la **série de Taylor** *de f en 0 :*

$$f(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Exemples 5

- *La fonction (réelle ou complexe) $f(x) = e^{-x^2}$ est la somme de la série :*

- *La fonction réelle $g(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ prolongée par $g(0) = 0$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ mais* **n'est pas** *developpable en série entière. En effet ...*

3.7 Développements en série entière de fonctions usuelles

Fonction	Série	Rayon de convergence
$\dfrac{1}{1-x}$	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
e^x	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\cos x$	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sin x$	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\cosh x$	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sinh x$	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$(1+x)^\alpha$	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x)$	$= \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$R = 1$
$\vdots$		

3.8 Applications

3.8.1 Quel est le développement de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?

3.8.2 Calculons à 10^{-3} près $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx$.

3.8.3 Trouvons une solution de l'équation différentielle

$$2xy'' + 2y' - y = 0$$

telle que $y(0) = 1$ **sous forme de série entière.**