Contrôle de mathématiques

– Jeudi 20 décembre ; durée 1h30 –

L'utilisation de calculatrices ainsi que de tout document autre que le formulaire est interdit.
Toute réponse devra être justifiée par un argument ou un théorème du cours

---

Exercice 1

Donner les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

$$\textbf{a.} \quad \sum (2^n + 3^n) x^n, \quad \textbf{b.} \quad \sum (3n+1) x^n, \quad \textbf{c.} \quad \sum \frac{2+n}{n!} x^n$$

Exercice 2

Soit la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

1°) Déterminer son rayon de convergence.

2°) Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série converge.

3°) Calculer la somme de cette série entière.

4°) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Exercice 3 Soit $f(t)$ le signal représenté ci-dessous :

1°) Décomposer $f(t)$ en somme de signaux élémentaires.

2°) Déterminer la transformée en z de la suite échantillonnée $f(nT_e)$ à la période $T_e = \frac{1}{10}$.

Exercice 4

Considérons l'équation réccurente linéaire suivante

$$(E) \qquad y_{n+1} + y_n = x_{n-1} - x_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On suppose que x_n et y_n sont nuls si $n < 0$ et $y_0 = 0$.
On notera X et Y mes transformées en z de $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$.

1°) Calculer la fonction $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

2°) Calculer l'expression de y_n dans les cas suivants :
- $x_n = U(n)$,
- $x_n = (n+1)U(n)$.

Formulaire de mathématiques

Théorème des séries alternées

Séries entières

Définition du rayon de convergence

Transformées en z

Propriétés de la transformées en z