IUT GEII — Université Rennes 1
Ma32 - Mathématiques pour le signal discret — Automne 2007

Contrôle de mathématiques

– Jeudi 29 novembre ; durée 1h30 –

L'utilisation de calculatrices ainsi que de tout document autre que le formulaire est interdit.

Exercice 1 – Question de cours –

Quels sont le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n.$$

Les séries numériques suivantes sont-elles convergentes ou divergentes :

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \sum_{n\geq 0}(n+1)3^n, \quad \sum_{n\geq 0}(n+1)(-1)^n$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_n$ la suite définie à partir de $u_0=1$ par $u_{n+1}=(1+\frac{1}{3^n})u_n$.

1°) Montrer que cette suite est croissante.

2°) Montrez que $\ln(1+x)\leq x$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$.

3°) En déduire que $\ln(u_{n+1})\leq \frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3}$.

4°) Pourquoi la suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ?

Exercice 3

Considérons la série numérique

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)(n+3)}.$$

1°) Montrer que cette série est convergente.

2°) Calculer ensuite sa somme.

Exercice 4

Considérons la suite donnée par $w_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ pour $n\geq 2$.

1°) Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} w_n$ est alternée.

2°) Pour tout $p\in\mathbb{N}$, montrer $w_{2p+1}=-w_{2p}$ et $w_{2p+1}>w_{2p-1}$.

3°) En déduire que $\sum_{n\geq 2} w_n$ converge.

4°) Calculer les sommes partielles $\sum_{n=2}^{2N+1} w_n$ et $\sum_{n=2}^{2N} w_n$.

5°) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

IUT GEII — Université Rennes 1
Ma32 - Mathématiques pour le signal discret — Automne 2007

Formulaire de mathématiques

Condition de convergence des suites monotones :
Toute suite croissante et majorée est convergente.

Condition de convergence des séries :
Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème de comparaison :
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ alors :

- si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge ;
- si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge.

Théorème d'équivalence :
Si $0 \leq u_n$, $0 \leq v_n$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Séries de Riemann :
La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Théorème des séries alternées :
Si $\sum u_n$ est une série alternée et que $(|u_n|)_n$ tend vers 0 en décroissant alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Sommes de séries géométriques :

$$\text{Si } |x| < 1 \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

— Corrigé de l'épreuve de Ma32 du 29/11/2007 —

Exercice 1

Le rayon de convergence de cette série est $R = 1$ et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On accepte aussi la réponse consistant à dérivée la série géométrique par rapport à sa raison

Comme $|1/2| < R$, la série $\sum_{n\geq 0}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge. Par contre $|3| > R$ et la série $\sum_{n\geq 0}(n+1)3^n$ diverge. Pour étudier la dernière série, on ne peut pas utiliser le rayon de convergence car $|-1| = R$. Mais le terme général de cette dernière série ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini : la série est donc divergente par la **condition de convergence des séries** du formulaire.

Les réponses utilisant les critères de d'Alembert et/ou de Cauchy sont acceptées.

Exercice 2

1°) Par définition de cette suite $u_{n+1} > 0$ si et seulement si $u_n > 0$. Comme $u_0 > 0$, tous les termes de la suite sont strictement positif. De plus $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{3^n} > 1$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$. Cette suite est donc croissante.

2°) Par définition du logarithme on a

$$\ln(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{1}{\tau}\, d\tau.$$

Or si $\tau \in [1, 1+x]$ on a $0 \leq \frac{1}{\tau} \leq 1$ donc

$$\int_1^{1+x} \frac{1}{\tau}\, d\tau \leq \int_1^{1+x} 1\, d\tau = x.$$

Ceci prouve l'inégalité.

3°) Le logarithme de u_{n+1} est $\ln(u_{n+1}) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{3^n}\right)u_n\right) = \ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right) + \ln u_n$. La question précécente appliquée à $x = \frac{1}{3^n}$ donne donc

$$\ln u_{n+1} \leq \tfrac{1}{3^n} + \ln u_n.$$

En réitérant ce calcul pour $\ln u_n$, on obtient

$$\ln u_{n+1} \leq \tfrac{1}{3^n} + \tfrac{1}{3^{n-1}} + \ln u_{n-1}$$

et ainsi

$$\ln u_{n+1} \leq \tfrac{1}{3^n} + \tfrac{1}{3^{n-1}} + \ldots + \tfrac{1}{3} + 1 + \ln u_0.$$

On finit le calcul en remarquant que $\ln u_0 = 0$ et que la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $1/3$ vaut $\frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3}$.

Une démonstration par récurrence convenait aussi.

4°) Pour tout n on a $\ln u_n \leq \frac{1}{1-1/3}$ donc $u_n \leq e^{3/2}$. Par conséquent cette suite est croissante et majorée, la **condition de convergence des suites monotones** assure qu'elle converge.

Exercice 3

1°) On a l'équivalence suivante

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Le **théorème d'équivalence** montre que la série de terme général $\frac{1}{(n+1)(n+3)}$ converge aussi.

2°) Décomposons $\frac{1}{(n+1)(n+3)}$ en éléments simples ; il existe deux nombres a et b tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+3}.$$

En multipliant cette égalité par $(n+1)(n+3)$ on obtient $1 = (a+b)n + (3a+b)$ c'est-à-dire $a = 1/2$ et $b = -1/2$. On utilise ensuite cette décomposition pour faire apparaître une série téléscopique et calculer la N-ième somme partielle :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+3)} &= \textstyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1/2}{n+1} + \sum_{n=0}^{N} \frac{-1/2}{n+3}, \\
&= \textstyle\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+3}\right), \\
&= \textstyle\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=2}^{N+2} \frac{1}{n+1}\right), \\
&= \textstyle\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}\right).
\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = 3/4.$

Exercice 4

1°) Si n est pair, $1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$. Si n est impair, $1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ et $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$. Cette série est bien alternée.

2°) Calculons les deux termes

$$\begin{aligned}
w_{2p+1} &= \ln\left(1 + \tfrac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}\right) = \ln\left(1 - \tfrac{1}{2p+1}\right) = \ln\left(\tfrac{2p}{2p+1}\right), \\
w_{2p} &= \ln\left(1 + \tfrac{(-1)^{2p}}{2p}\right) = \ln\left(\tfrac{2p+1}{2p}\right).
\end{aligned}$$

On a bien $w_{2p+1} = -w_{2p}$. Calculons ensuite

$$w_{2p-1} = \ln\left(1 + \tfrac{(-1)^{2p-1}}{2p-1}\right) = \ln\left(1 - \tfrac{1}{2p-1}\right).$$

Comme $2p+1 > 2p-1$ on a $\frac{-1}{2p+1} > \frac{-1}{2p-1}$ et

$$w_{2p+1} = \ln\left(1 + \tfrac{-1}{2p+1}\right) > \ln\left(1 + \tfrac{-1}{2p-1}\right) = w_{2p-1}.$$

3°) La suite $(|w_n|)_n$ vérifie $|w_{2p}| = |w_{2p+1}|$ et $|w_{2p-1}| > |w_{2p+1}| = |w_{2p}|$ c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|w_n| \geq |w_{n+1}|$: la suite est décroissante. Sa limite est 0. Le **théorème des séries alternées** prouve que la série $\sum_{n\geq 2} w_n$ converge.

4°) On a $w_{2p} + w_{2p+1} = 0$ donc $0 = \sum_{p=1}^{N} w_{2p} + w_{2p+1} = \sum_{n=2}^{2N+1} w_n$. Pour calculer l'autre somme on remarque de $\sum_{n=2}^{2N} w_n = \sum_{n=2}^{2N+1} w_n - w_{2N+1} = -w_{2N+1}$.

5°) On en déduit que $\sum_{n=2}^{2N} w_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sum_{n=2}^{2N+1} w_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.$$