IUT GEII — Université Rennes 1

Ma32 - Mathématiques pour le signal discret — Automne 2008

Contrôle de mathématiques

– Jeudi 27 novembre ; durée 1h30 –

L'utilisation de calculatrices ainsi que de tout document autre que le formulaire est interdit.

Exercice 1

En justifiant tout vos calculs, calculez $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

Exercice 2

Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{e^{n^2}}{(n!)^2} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+e^{1/n})^2}.$$

Exercice 3

Considérons la série $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

1°) Déterminez la nature de cette série.

2°) Calculez les sommes partielles $S_N = \sum\limits_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, puis la somme de la série.

Exercice 4 Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definie par récurrence à partir de $u_0 = 0$ par

$$u_{n+1} = \frac{8}{u_n - 3} + 1.$$

1°) Donnez une interprétation graphique de la construction de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2°) D'après l'interprétation graphique, la suite est-elle monotone ?

3°) Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-5, 0]$.

4°) Si la suite converge, quelles sont les valeurs possibles de la limite ?

Considérons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 5}$.

5°) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{5}$.

6°) Calculez v_n et déduisez-en u_n puis la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.