IUT GEII — Université Rennes 1
Ma32 - Mathématiques pour le signal discret — Automne 2008

Contrôle de mathématiques

– Jeudi 27 novembre –

Exercice 1 En calculant le logarithme de la suite on a :

$$\ln\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right] = n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n\frac{-2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -2.$$

La fonction exponentielle étant continue en -2 on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \frac{1}{e^2}$.

Exercice 2

Ces deux séries sont à termes positifs.

- Appliquons le critère de d'Alembert :

$$\frac{\frac{e^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^2}}{\frac{e^{n^2}}{(n!)^2}} = \frac{\frac{e^{(n^2+2n+1)}}{(n+1)^2((n)!)^2}}{\frac{e^{n^2}}{(n!)^2}} = \frac{e^{(2n+1)}}{(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$$

car $\frac{e^x}{x} \underset{x\to\infty}{\to} \infty$. D'après le critère de d'Alembert, la série diverge.

- L'exponentielle étant toujours positive, on a $n+e^{1/n} > n$ d'où $\frac{1}{(n+e^{1/n})^2} < \frac{1}{n^2}$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car son exposant est strictement plus grand que 1. Le critère de comparaison assure la convergence de la série $\sum \frac{1}{(n+e^{1/n})^2}$.

Exercice 3

1°) C'est une série à termes négatifs, regardons son opposé : $\sum_{n\geq 2} -\ln(1-\frac{1}{n^2})$. C'est une série à termes positifs dont le terme général est équivalent à

$$-\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

qui est le terme général d'une série de Riemann d'exposant strictement plus grand que 1 donc convergente. Le théorème d'équivalence assure la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} -\ln(1-\frac{1}{n^2})$. La série opposée converge aussi.

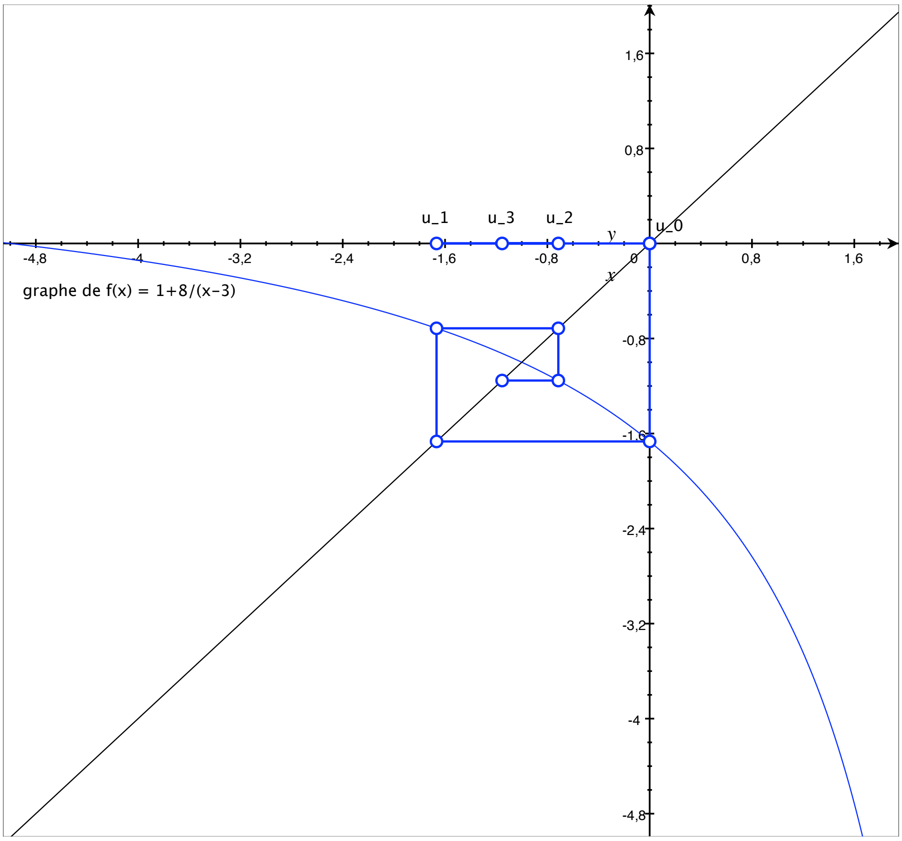
2°)

$$\begin{aligned}
S_N &= \textstyle\sum_{n=2}^N \ln(1-\frac{1}{n^2})\\
&= \textstyle\sum_{n=2}^N \ln(\frac{n^2-1}{n^2})\\
&= \textstyle\sum_{n=2}^N \ln(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2})\\
&= \textstyle\sum_{n=2}^N \ln(n+1) + \sum_{n=2}^N \ln(n-1) - 2\sum_{n=2}^N \ln(n)\\
&= \textstyle\sum_{n=3}^{N+1} \ln(n) + \sum_{n=1}^{N-1} \ln(n) - 2\sum_{n=2}^N \ln(n)\\
&= \ln(N+1) \quad + \quad \ln(1) - \ln(N) - \ln(2)\\
&= -\ln(2) + \ln\left(1+\frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

On obtient donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{N\to+\infty} S_N = -\ln(2)$.

Exercice 4

1°)



2°) D'après l'interprétation graphique on a $u_{2n+1} < u_{2n+2} < u_{2n}$. La suite ne semble pas monotone.

3°) L'inclusion est vraie pour n=0. Supposons qu'elle soit vraie pour une valeur de l'indice : n. Le terme suivant vérifie aussi $u_{n+1} \in]-5, 0]$ car

$$\begin{gathered} -5 < u_n \leq 0, \\ -8 < u_n - 3 \leq -3, \\ -\tfrac{8}{3} \leq \tfrac{8}{u_n-3} < -1, \\ -\tfrac{5}{3} \leq \tfrac{8}{u_n-3} + 1 < 0. \end{gathered}$$

On a ainsi montré par récurrence l'inclusion souhaitée pour tout indice $n \in \mathbb{N}$.

4°) La fonction $f(x) = \frac{8}{x-3} + 1$ étant continue sur $[-5, 0]$ si la suite converge, elle converge vers un nombre ℓ vérifiant $\ell = \frac{8}{\ell-3} + 1$, c'est-à-dire $0 = \ell^2 - 4\ell + 5 = (\ell+1)(\ell-5)$. Si la limite existe elle vaut soit -1 soit 5.

5°) Calculons v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-5} = \frac{\frac{8}{u_n-3}+1+1}{\frac{8}{u_n-3}+1-5} = \frac{8+2u_n-6}{8-4u_n+12} = \frac{2u_n+2}{-4u_n+20} = -\frac{1}{2}\frac{u_n+1}{u_n-5} = -\frac{1}{2}v_n$$

La suite est bien géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ de premier terme $v_0 = -\frac{1}{5}$.

6°) On en déduit que $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{5\times 2^n}$. On a donc $\frac{u_n+1}{u_n-5} = \frac{(-1)^{n+1}}{5\times 2^n}$ c'est-à-dire $u_n+1 = \frac{(-1)^{n+1}}{5\times 2^n}(u_n-5)$ et

$$u_n = \frac{-1 + \frac{(-1)^n}{2^n}}{1 + \frac{(-1)^n}{5\times 2^n}}.$$

On trouve alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ comme l'interprétation graphique le laissait croire.