Devoir à la maison n°3

– À rendre à la fin de la onzième semaine –

Ce devoir est un examen blanc à faire tout seul. Réservez une période de 2h10 dans votre emploi du temps, réglez votre réveil pour qu'il sonne au bout de deux heures et mettez vous dans les conditions de l'examen.

Ensuite à l'aide du cours et tout document que vous jugerez utile, reprenez les exercices du devoir.

Remarque – 2 heures pour 6 exercices : 20 min par exercices. Vous ferez le même calcul pour les points tout seul.

Exercice 1 – Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad (1-t^2)\frac{dx}{dt} + tx - 1 = 0.$$

1°) Déterminez les singularités de cette équation.
2°) Résoudre l'équation homogène associée et discutez des solutions maximales.
3°) Déterminez une solution particulière de (E).
4°) Trouvez l'ensemble des solutions. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 – Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$t^2(\ln|t|)\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

1°) Déterminez les singularités de cette équation.
2°) Vérifiez que la fonction $\ln|t|$ est une solution.
3°) Soit $x(t)$ une solution, on considère la fonction $z(t)$ vérifiant $x(t) = z(t)\ln|t|$.
Donnez l'équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par $\frac{dz}{dt}(t)$.
4°) Résoudre cette équation. Déduisez-en $z(t)$ puis $x(t)$.

Exercice 3 – Considérons l'équation de Ricatti suivante :

$$\frac{dx}{dt} + x^2 + 2xt + t^2 - 5 = 0.$$

1°) Tracez quelques isoclines. Esquissez les graphes de quelques solutions.
2°) Cette équation est-elle intégrable par quadrature ? Si oui, intégrez la sinon justifiez votre réponse.

Exercice 4 – Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x'(t) & = & & x(t) & + & 2 \; y(t) \\ y'(t) & = & - & x(t) & + & 4 \; y(t) \end{array}\right. .$$

Exercice 5 – Écrivez un script MATLAB qui calulent des valeurs approchées par la méthode d'Euler de pas $0,1$ pour la solution de l'équation

$$x' = x^2\sin(t) + 1$$

valant 2 lorsque t vaut 3 sur un intervalle de longueur 10.

Exercice 6 – Résolvez l'équation différentielle

$$x'' + 2x' + 2x = \sin(\omega t) \quad \omega \in \mathbb{R}^*.$$

Donnez la solution ayant pour condition initiale $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.