UFR Mathématiques — Université Rennes 1
Licence C02 - Étude de fonctions - Équations différentielles — Automne 2007

Devoir à la maison n°2

– À rendre à la fin de la huitième semaine –

Vous pouvez utiliser tous les documents dont vous aurez besoin (notes de cours, livres, internet, logiciels, calculatrices ...) à condition de le signaler dans une partie Références et d'expliquer suffisamment vos réponses pour que je les comprenne sans avoir à utiliser vos références.

Formats acceptés : `papier, .pdf, .dvi, .ps, .odt, .rtf`. (Les fichiers `.doc` seront lus dans l'état où OpenOffice les ouvrira.)

– Partie numérique –

Exercice 1

Écrivez les fonctions MATLAB permettant d'obtenir des valeurs approchées par les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta pour la solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = -tx$$

valant `x0` en `t`$= 0$ sur l'intervalle $[0, 15]$ pour un pas `h` valant $0, 3$.

Tracez quelques solutions et comparez les à la solution exacte obtenue en séparant les variables. Votre ordinateur fait-il du bon boulot ?

Exercice 2

Écrivez les fonctions MATLAB permettant d'obtenir des valeurs approchées par les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta pour la solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - t$$

valant `x0` en `t`$= 0$ sur l'intervalle $[0, 25]$ pour un pas `h` valant $0, 4$.

Tracez quelques solutions et comparez les au comportement qualitatif obtenu en cours. Votre ordinateur fait-il du bon boulot ?

Exercice supplémentaire

Votre ordinateur ne fait que ce que vous lui demandez, il existe des méthodes qui permettent de faire faire à l'ordinateur les calculs d'une meilleur manière que ce que vous lui avez demandé. Cherchez puis testez sur l'exercice 2 la méthode dite "d'Euler implicite".

Il n'y a pas de page "Euler implicite" sur Wikipédia mais vous en trouverez plein sous Google.

– Partie analytique–

Vous pouvez vous aider du logiciel de votre choix pour dessiner les solutions si vous en avez besoin. Dans ce cas imprimez les dessin obtenus et expliquez moi comment vous les avez obtenus.

Exercice 3 – *Une équation à variables séparées, ...*

Résolvez l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 + x^2}{1 + t^2}.$$

Simplifiez au maximum les formules que vous obtenez : les solutions sont des fractions rationnelles.

Donnez les solutions maximales de cette équation.

Exercice 4 – *…, deux équations linéaires …*
Résolvez les deux équations suivantes puis tracez les graphes des solutions.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la première équation est (E_α) :

$$(t - t^3)\frac{dx}{dt} + (2t^2 - 1)x = \alpha t.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, la deuxième équation est (L_n) :

$$\frac{dx}{dt} + (n/t)x = e^t t^n.$$

Exercice 5 – *… et une équation homogène.*
Considérons l'équation

$$t^2 \frac{dx}{dt} = t^2 + tx + x^2.$$

1°) Quels sont les points où on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz?

2°) Montrez que si $x(t)$ est une solution de l'équation et λ est un nombre réel non nul alors la fonction $y(t) = \lambda x(\frac{t}{\lambda})$ est aussi une solution de l'équation. Comment obtenir le graphe de $y(t)$ à partir du graphe de $x(t)$?

3°) Si $x(t)$ est une solution de l'équation, quelle équation différentielle est vérifiée par la fonction $z(t) = \frac{x(t)}{t}$.

4°) Comment s'appelle le type d'équation que vérifie $z(t)$? Résolvez-la et déduisez-en une formule pour $x(t)$

Exercice 6– *Équations différentielles et géométrie des tissus en droites*
Les graphes des solutions des équations différentielles du premier ordre donne des familles de courbes dépendant d'un paramétre dans le plan de coordonnées (t, x). Nous avons vu dans le DM1 que la famille des droites tangentes à la parabole d'équation $x = t^2$ sont exactement les solutions d'une même équation différentielle. En est-il de même pour les familles de courbes qui arrivent naturellement en géométrie ?

1°) Montrez que les tangentes non verticales a une ellipse (d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{t^2}{b^2} = 1$) sont les graphes des solutions d'une équation différentielle du premier ordre non résolue. Cette équation admet deux solutions maximales $\mathscr{C}^\infty$ en plus des droites précédentes quelles sont-elles ?.

2°) Répondez aux mêmes questions dans le cas d'une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1$.

3°) Que pensez-vous du cas général ? Est-ce que l'ensemble des tangentes à une courbe algébrique (courbe donnée par $P(t, x) = 0$ où P est un polynôme en deux variables) est toujours l'ensemble des graphes des solutions d'une équation différentielle ? Pour les plus courageux, vous pouvez essayer de le démontrer dans le cas particulier où la courbe à pour équation $x - P(t) = 0$ avec P un polynôme en t.