UFR Mathématiques — Université Rennes 1

Licence C02 - Étude de fonctions - Équations différentielles — Automne 2007

Devoir à la maison n°1

– À rendre à la fin de la cinquième semaine –

Vous pouvez utiliser tous les documents dont vous aurez besoin (notes de cours, livres, internet, logiciels, calculatrices …) à condition de le signaler dans une partie Références et d'expliquer suffisamment vos réponses pour que je les comprenne sans avoir à utiliser vos références.

Formats acceptés : `papier, .pdf, .dvi, .ps, .odt, .rtf`. (Les fichiers `.doc` seront lus dans l'état où OpenOffice les ouvrira.)

LaTeX

Pour écrire, les mathématiciens (mais aussi les physiciens, certains chimistes et biologistes et encore d'autres) utilisent LaTeX (`http://fr.wikipedia.org/wiki/LaTeX`) un logiciel libre qui tourne sous Linux/Unix mais existe aussi pour Mac ou Windows.

Installer LaTeX:

- Pour Linux/Unix, vous en connaissez assez pour vous débrouiller. Sous UBUNTU un paquet LaTeX(TeX-Live) est disponible dans le gestionnaire de paquets et TeX-Maker (paquet du même nom je crois) vous facilitera l'utilisation.
- Pour Mac, vous pouvez installer TeXShop — `http://www.uoregon.edu/~koch/texshop/`.
- Pour Windows, suivez `http://stephlefevre.free.fr/tutorial_framasoft/MikTeX_TeXnicCenter.htm`.

Pour apprendre à écrire avec LaTeX, vous pouvez lire les tutoriels de Framasoft `http://www.framasoft.net/`. Pour exemples, les fichiers `.tex` des feuilles de TD, de TP et de DM sont diponibles sur ma page "enseignement".

Rappel

Que vous utilisiez LaTeX, OpenOffice ou votre stylo, les mathématiques s'écrivent en français[1]. Les phrases commencent par un mot, pas par un symbole mathématique, contiennent au moins un verbe et se terminent par un point.

Exercice 1

Nous voulons dessiner la courbe du plan constituée des points de coordonnées $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ telles que

$$x^2y^2 - x^2y - 2xy - x + 1 = 0.$$

1°) Donnez une paramétrisation de cette courbe par $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ avec $x(t)y(t) = t$. *Un courbe parametrée par deux fractions rationnelles est dite unicursale.*

2°) À l'aide de la paramétrisation, dessinez la courbe, c'est-à-dire, étudiez les variations de $x(t)$ et $y(t)$, la convexité si c'est possible, les points doubles et les branches infinies puis faites un dessin.

3°) Écrivez deux fonctions MATLAB qui calculent $x(t)$ et $y(t)$ puis vérifiez votre dessin a l'aide de `plot`.

4°) Votre calculatrice ou votre ordinateur peut-il tracer directement la courbe sans utiliser la paramétrisation de la question 1°) ?

Exercice 2

Quelles sont les courbes décrites par les deux équations suivantes :

$$\mathscr{C}_1 \text{ donnée par } x^2 + y^2 - 9x - 14y + 63 = 0,$$

$$\mathscr{C}_2 \text{ donnée par } x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0.$$

En combien de points s'intersectent-elles ? Donnez des équations pour les tangentes à ces courbes en les points d'intersections.

Donnez une paramétrisation de $\mathscr{C}_1$.

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ soit donnée par $f(x, y) = 0$?

---

[1] L'anglais, l'espagnol, le latin sont aussi acceptés.

Exercice 3

Nous voulons montrer que les tangentes au graphe $\mathscr{G}$ d'équation $y = \frac{\sin x}{x}$ aux points d'inflexions sont toutes tangentes à une même courbe algébrique. *Une courbe algébrique plane est une courbe de niveau d'un polynôme en deux variables. La courbe $\mathscr{G}$ n'est pas algébrique.*

1°) Soit $\begin{bmatrix} x_0 \\ \frac{\sin x_0}{x_0} \end{bmatrix}$ un point d'inflexion de ce graphe, montrez que

$$\cos^2 x_0 = \frac{(2 - x_0^2)^2}{4 + x_0^4}.$$

Le calcul des abscisses des points d'inflexion nécessite des méthodes de calculs approchées que vous verrez dans un autre cours de maths.

2°) Calculez une équation de la tangente au graphe au-dessus de x_0 ne contenant ni $\cos x_0$ ni $\sin x_0$. (Cette équation dépendra du signe de $\cos x_0$.)

Considérons la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + 4y^2 = 4$. (Comment s'appelle ce type de courbe algébrique ?)

3°) Vérifiez que les tangentes trouvées en 2°) sont toutes tangentes à $\mathscr{C}$.

4°) Illustrez cet exercice par un dessin.

Exercice 4

Nous voulons comprendre les solutions de l'équation différentielle d'inconnue $x(t)$

$$(E) : \quad x = t\frac{dx}{dt} - \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre non-linéaire (à cause du carré) et non résolue.

1°) Montrez que si $x_0 > t_0^2$, il n'existe pas de solution $u(t)$ de (E) vérifiant $u(t_0) = x_0$. (*Indication :* que vaudrait la dérivée d'une telle solution en t_0 si elle existait ?)

2°) Vérifiez que les fonctions $u_c(t) = ct + \frac{c^2}{4}$ sont solutions de (E) pour tout $c \in \mathbb{R}$.

3°) Vérifiez que la fonction $f(t) = t^2$ est aussi solution de (E).

4°) Quel rapport existe-t-il entre les droites données par les graphes des u_c et la parabole donnée par le graphe de f ? Combien de solutions prennent la valeur x_0 en t_0 si $x_0 \leq t_0^2$?

5°) Faites le dessin que vous auriez dû faire au 4°) pour répondre à la question, si vous le l'avez pas fait.

Exercice supplémentaire

Faites calculer à votre ordinateur les nombres définis par récurrence par la formule

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \text{ avec } x_0 \in]0, 1[.$$

Pour $r < 3$ la suite converge vers un nombre x représenté sur le dessin ci-dessous. Pour $3 < r < 1 + \sqrt{6} \sim 3,45$, après un grand nombre d'iterations, la suite finit par osciller entre deux nombres. Pour $3,45 < r < 3,54$ (approximativement), la suite finit par osciller entre quatre valeurs etc ... Sauriez-vous prouvez que pour $r < 3$ la suite converge ? Que se passe-t-il si $r = 4$? Existe-t-il une valeur de r pour laquelle la suite finit par osciller entre trois valeurs ?

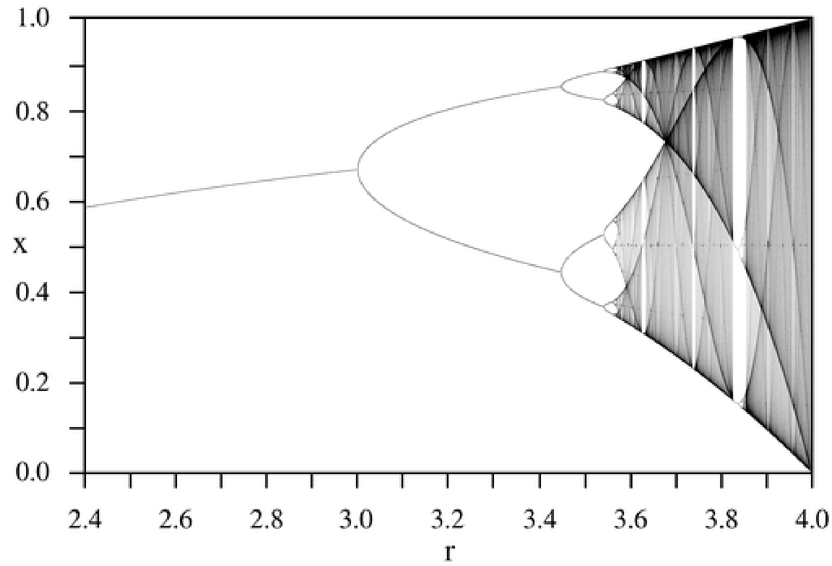

Diagramme de bifurcation de l'équation logistique.
`http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map`