UFR MATHÉMATIQUES | UNIVERSITÉ RENNES 1
Licence C02 - Étude de fonctions - Équations différentielles | Automne 2007

Devoir à la maison n°0
– À rendre à la fin de la deuxième semaine –

Ce devoir est une révision de ce qu'il faut savoir en analyse et en algèbre linéaire pour pouvoir suivre le C02.

Vous pouvez utiliser tous les documents dont vous aurez besoin (notes de cours, livres, internet ...) à condition de le signaler dans une partie RÉFÉRENCES et d'expliquer suffisamment vos réponses pour que je les comprenne sans avoir à utiliser vos références.

Formats acceptés : `papier, .pdf, .ps, .odt, .rtf`. (Les fichiers `.doc` seront lus dans l'état où OpenOffice les ouvrira.)

---

1 – Révisions d'analyse

1.1 Calculez les primitives suivantes (n'oubliez pas de préciser sur quel intervalle vous cherchez la primitive ainsi que la constante d'intégration !):

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^{10}+1}{x^2(x^2-2)}dx$ **e)** $\displaystyle\int x^2 \sin x dx$ **f)** $\displaystyle\int x^3 e^x dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cosh x}dx$ **i)** $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

1.2 Démonstration du théorème des accroissements finis.

Étape 0 : Énoncez le théorème des accroissements finis.

Première étape : Démonstration du

Théorème (Bolzano-Weierstraß) – *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points d'un intervalle fermé borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Il existe une suite extraite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.*

Si la suite est constante à partir d'un certain $N \in \mathbb{N}$, la suite converge et la conclusion du théorème est vérifiée. Dans le cas contraire, voici la construction des premiers termes de la suite extraite. Le suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se compose d'une infinité de points de l'intervalle. Coupons l'intervalle en deux : $[a,b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$. L'une des deux parties au moins contient une infinité de points de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Choisissons l'une de ces parties, qu'on renommera $[a_1, b_1]$, et un point de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à cette partie, qu'on renommera z_1.

Continuez cette construction pour obtenir la suite des z_m, $m \in \mathbb{N}$ et montrez qu'elle est de Cauchy donc qu'elle converge et que la limite appartient à $[a,b]$.

Deuxième étape : Démonstration du

Théorème – *Une fonction à valeurs réelles définie et continue sur un intervalle fermé borné admet un maximum.*

Notons $[a,b]$ cet intervalle. Choisissez une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $f([a,b])$ convergent vers la borne supérieur de l'ensemble $f([a,b])$ que l'on notera s. (Justifiez l'existence de cette suite.) En déduire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$ telle que $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s$. Concluez à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstraß.

Troisième étape : Démonstration du

Théorème (Rolle) – *Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ vérifiant $f(a)=f(b)$. Alors il existe un point $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

En utilisant le théorème précédent, la preuve est facile. Vous n'avez pas besoin d'indications.

Quatrième étape : Fin de la preuve. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $f(x)-mx-p$ pour des nombres m et p bien choisis, démontrez le théorème.

2 – Révisions d'algèbre linéaire

2.1 Donnez la définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et dites parmi les ensembles suivants lesquels en sont. Vous donnerez ensuite leurs dimensions. (*Attention certains sont de dimension infini !*)

a) $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$

b) $\{x^2f(x)+(x-1)g(x)$ avec $f,g\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})\}$

c) $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$: l'ensemble des fonction de classe $\mathscr{C}^k$

d) $\{x^2a+(x-1)b$ avec $a,b\in\mathbb{R}\}$

e) $\{e^x+a\sin x+b\sin x$ avec $a,b\in\mathbb{R}\}$

f) $\mathscr{F}(I,\mathbb{R}_{\geq 0})$: l'ensemble des fonctions à valeurs positives

g) $\{f\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})\mid f'^2+f^2-25=0\}$

h) $\{f\in\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})\mid f^{(k)}=f\}$

g) $\{A\cos(\omega x+\varphi)\mid A,\omega,\varphi\in\mathbb{R}\}$

2.2 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? (*Les fonctions dont il est question sont toujours supposées définies sur un intervalle I et à valeurs réelles.*)

a) Pour $p\leq k$, $D^p:\mathscr{C}^k\to\mathscr{C}^{k-p}; f\mapsto f^{(p)}$

b) Pour $g\in\mathscr{F}$, $M_g:\mathscr{F}\to\mathscr{F}; f\to gf$

c) $L:(\mathscr{C}^k)^n\to\mathscr{C}^k; (f_1\dots f_n)\mapsto\Pi_{i=1}^n f_i$

d) $T:(\mathscr{C}^k)^n\to(\mathscr{C}^{k-1})^{n-1}; (f_1\dots f_n)\mapsto(f_1'-f_2\dots f_{n-1}'-f_n)$