Contrôle Terminal

– vendredi 21 décembre 2007 ; durée 2 heures –

Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable ...) et aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 – Donnez toutes les solutions maximales de léquation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{t^2+2}x + \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}.$$

Exercice 2 – Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 4x = 2e^t \cos(\sqrt{3}t).$$

1°) Donnez toutes les solutions maximales de cette équation.

2°) Déterminez la solution valant 0 en 0 et dont la dérivée s'annule en 0.

Exercice 3 – Considérons le système suivant

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 2x - y \end{cases}.$$

1°) Donnez toutes les solutions maximales de ce système.

2°) Déterminez la solution valant $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ en 0 et dessinez la courbe paramétrée par cette solution.

Problème – Le but de ce problème est d'étudier l'équation différentielle

$$(E) \qquad \frac{dx}{dt} = x^3 + t.$$

1°) Faites une étude de la fonction $f(x) = -\frac{1}{3x^2} - x^3$. Dessinez sur un même graphique, appellé n°1, les graphes de f, de $-x^3$ et de $-x^3 - 1$.

2°) Dessinez les isoclines de (E) de pente -2, -1, 0, 1 et 2 sur un graphique d'abscisse t et d'ordonnée x appellé dans la suite graphique n°2.

3°) Vérifiez que les points d'inflexion des solutions de (E) sont sur la courbe d'équation $t = f(x)$. En déduire les zones de concavité et de convexité des solutions sur le graphique n°2.

4°) Esquissez quelques solutions de (E) sur le graphique n°2 et en particulier la solution maximale $u(t)$ valant 1 en 1.

5°) Écrivez une fonction MATLAB `euler.m` traçant les valeurs approchées par la méthode d'Euler de la solution de (E) valant x_0 en t_0 sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

Soient $v(t)$ la fonction valant 1 en 1 et vérifiant $v'(t) = (v(t))^3$ et $t_1 = min\{t > 1 \mid u(t) = v(t)\}$. Supposons $t_1 < +\infty$.

6°) Montrez que $u(t) > v(t)$ lorsque $t \in]1, t_1[$.

7°) Déduisez-en que $u'(t_1) \leq v'(t_1)$ puis une contradiction qui prouve que pour tout $t > 1$, $u(t) > v(t)$.

8°) Trouvez l'expression de $v(t)$ en fonction de t. Déduisez-en l'existence d'un nombre $a > 1$ tel que

$$u(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} +\infty.$$

———————— *Questions hors programme sur 0pt* ————————————————————————

9°) Existe-il une solution définie sur $\mathbb{R}$?

10°) Cette équation est-elle résoluble par quadrature ?