Feuille d'exercices n°5
Équations différentielles

4.1. En faisant un changement de variable adéquat, résolvez les équations suivantes sur tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$:

a) $2xe^y\dfrac{dy}{dx} + e^y - x^2 = 0$,

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{x^2}y - 2\dfrac{y}{x}\log(\dfrac{y}{x})$,

c) $(1+x^2)\dfrac{dz}{dx} = 2x(1+z^2)\arctan z$.

4.2. Intégrez les équations de Bernouilli suivantes :

a) $y' + \dfrac{1}{x}y = y^2$,
b) $y'\cos x + y\sin x = -y^3$,
c) $y' = ay + by^k$ avec a et b deux nombre réels et k un entier supérieur à 2,
d) $x^5y' = 3x^4y - y^3$.

4.3. Considérons l'équation suivante

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

1°) Montrez que si $y(x)$ est une solution alors la fonction $\overline{y}(x) = \lambda y(\lambda x)$ est aussi une solution pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2°) Faites le changement de variable $t = y/x$ dans l'équation et résolvez la.

3°) Appliquez la même méthode pour trouver une équation $F(x,y) = C$ définissant les solutions de

$$y' = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3xy^2}$$

lorsque C parcourt les nombres réels.

Ces équations sont dites homogènes car elle sont invariantes sous l'action diagonale du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

4.4. Intégrez les équations de Ricatti suivantes :

a) $y' = (x^2+1)y^2 - y - x^2$,
b) $-(x^2+1)y' + 2x^3y + (1-x^2)y^2 = (x^2+1)^2$,
c) $y'(1-x^3) + 2xy^2 - x^2y - 1 = 0$.

4.5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + 9y = 0$,
b) $y'' - 7y' + 12y = 0$,
c) $y'' + 2y' + 10y = 20$,
d) $y'' - 7y' + 12y = x$,
e) $y'' - y = 5x + 2$,
f) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$,
g) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$,
h) $y'' + 4y = 2\sin 2x$,

4.6. - Oscillateur amorti forcé -

L'abscisse (éventuellement curviligne) d'un oscillateur de fréquance $1/\omega$ vérifie l'équation $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$. Résolvez cette équation. Présentez la solution en mettant en évidence l'amplitude A et la phase de l'oscillation φ. Faites de même pour un pendule amorti : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$, $0 < \lambda < \omega$ étant le coefficient de frottement amortissant le mouvement ; puis pour un pendule amorti forcé par une force périodique : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = \overline{A}\cos(\overline{\omega}t + \overline{\varphi})$