Feuille d'exercices n°3

Études de fonctions & applications

3.1. Pour chacune des fonctions suivantes, écrivez l'équation de la tangente au point indiqué et trouvez la position du graphe par rapport à cette tangente :

(a) $(\sin x)^2 - \dfrac{x^2}{1+x^2}$ au point 0, (b) $\sin x + \arcsin x$ au point 0, (c) $\sqrt{3x} - \sqrt{2+x}$ au point 1.

3.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1°) Quelle est la régularité de f ?

2°) Quel est le sens de variation de f ? Calculez la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3°) Montrez qu'il existe une droite telle que la distance de $(x, f(x))$ à cette droite tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$. Cette droite est appelée asymptote.

4°) Trouvez l'équation de la tangente au point $(0, 1)$.

5°) Dessinez le graphe de f.

Posons $g(t) = f\left(t + \frac{1}{2t^2}\right)$ si $t \neq 0$ et $g(0) = 0$.

6°) Calculez les limites à gauche et à droite de g en 0.

7°) Montrez que la fonction g est continue et dérivable en 0.

8°) Trouvez l'équation de la tangente au graphe de g en 0 et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

3.3. Soit $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right) \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1°) Quelle est la régularité de f ? Est-elle continûment prolongeable en 0 ?

2°) Montrez que f est croissante sur $]0, +\infty[$ et qu'il existe un nombre réel $a \in]-1, 0[$ tel que f est croissante sur l'intervalle $]-\infty, a[$ et décroissante sur $]a, 0[$.

3°) Cette fonction a-t-elle des asymptotes quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$?

4°) Calculez $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$ et dessinez le graphe de f.

3.4. L'espace $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1°) En utilisant un argument de dénombrabilité donnez sa dimension. Donnez deux nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Donnez en trois.

Le but du reste de l'exercice est de répondre à cette dernière question dans le cas où vous n'y seriez pas arrivé. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $ae^2 + be + c = 0$.

2°) En appliquant la formule de Taylor sur $[0, 1]$ à l'application $\varphi : x \mapsto ae^x + ce^{-x}$, démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\theta_n \in]0, 1[$ tels que :

$$-b = \frac{ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a + (-1)^k c}{k!}.$$

2°) En déduire que pour n assez grand $ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n} = 0$ puis que $1, e, e^2$ sont linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$

(On rappelle que e^x est égale à la somme de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$. – *Montrez que cette série converge.* –)

3.5. Soit f une fonction vérifiant $f'(x) = (f(x))^2$.

1°) Quelle est sa variation ? Admet-elle des asymptotes en $+\infty$ ou en $-\infty$? Dessinez son graphe.

On cherche toutes les fonctions vérifiant la même équation.

2°) Vérifiez que $g(x) := -f(-x)$ satisfait aussi l'équation de f. Qu'en déduisez vous si $f(0) = 0$?

3°) Vérifiez que si $c \in \mathbb{R}$, $g(x) := f(x + c)$ satisfait aussi l'équation. Dessinez toutes les solutions de cette équation.

Les exercices qui n'ont pas été faits en TD sont à rendre la semaine prochaine.