Feuille d'exercices n°1

Fonctions continues et uniformément continues

Exercices. *Échauffements*

1.1. Trouvez tous les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 telle que $(\star) : f(x^2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrez que f est constante. Donnez un exemple d'application non constante vérifiant l'égalité $(\star)$.

1.3. On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ 1/q \text{ si } x = p/q, \ p \wedge q = 1 \end{cases} .$$

Déterminez l'ensemble des points de discontinuité de f.

1.4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Montrez qu'il n'existe aucune fonction numérique f sur I telle que :
(a) $\forall x \in I \cap \mathbb{Q}, \ f(x) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$,
(b) $\forall x \in I \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}), \ f(x) \in \mathbb{Q}$.

Exercices. *connexité*

1.5. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Démontez la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \quad \exists x_n \in [0, 1] \text{ tel que } f(x_n + 1/n) = f(x_n).$$

1.6. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application continue telle que $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. Montrez que f a un point fixe.

Exercices. *compacité*

1.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrez que si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Exercices. *uniforme continuité*

1.8. Soit n un entier. Étudiez la continuité uniforme de $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \ ; \ x \mapsto x^{1/n}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ x \mapsto x^n$.

1.9. Montez que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \quad x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

1.10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniforménent continue. Montrez qu'il existe deux réels a et b tels que $|f(x)| \leq a|x| + b$ pour tout réel x.

1.11. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b[$ à valeurs réelles ou complexes et uniformément continue. Montrez que la limite à gauche de f en b existe.