UFR Mathématiques
Licence 2ème année

Université Rennes 1
Année 2006/2007

Étude de fonctions, équations différentielles
TP3 – Résolutions approchées d'équations différentielles

À rendre à la fin du TP par courrier électronique

Différentes méthodes pour obtenir des valeurs approchées de solutions d'équations différentielles

On considère le modèle de Lotka-Volterra de compétition entre deux espèces, par exemples des requins et des sardines, dont les populations sont notées respectivement $y_1(t)$ et $y_2(t)$. Les taux d'accroissement de ces espèces sont données par

$$\frac{y_1'}{y_1} = a - by_2 \quad \text{et} \quad \frac{y_2'}{y_2} = -(c - dy_1)$$

a, b, c, d étant des constantes dépendant des espèces considérées.

0°) Préliminaires – Expliquer sur un dessin pourquoi la méthode de résolution approchée de Runge-Kutta décrite dans les rappels donne effectivement une approximation d'une solution.

1°) Résolution numérique – Écrire une fonction MATLAB `RK.m` mettant en œuvre la méthode de Runge-Kutta pour calculer les valeurs approchées de la solution ayant pour condition initiale `y10,y20` sur l'intervalle de temps `[0,T]` pour un pas `h` en fonction des paramètres `a,b,c,d`.

2°) Illustrations – Écrire un script qui trace sur un même graphique les valeurs approchées de y_1 et de y_2 en fonction du temps pour les paramètres

`a=2, b=0.4 c=1, d=0.1, T=5, h=0.1`

dans chacun de cas donnés par les conditions initiales suivantes

`[y01,y02] = [22,8] , [18,7] , [14,6] , [10,5].`

Écrire un script qui trace sur un seul et même graphique les valeurs approchées de y_1 en fonction de celles de y_2 pour les paramètres et conditions initiales ci-dessus.

3°) Comparaison – Trouvez avec du papier et un crayon une intégrale première du système de Lotka-Volterra de la forme $L(y_1, y_2, \log y_1, \log y_2)$ avec L linéaire. Que pouvez-vous en déduire sur la forme tracer par $(y_1(t), y_2(t))$ dans $\mathbb{R}^2$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$? Est-ce cohérent avec les graphiques donné par le deuxième script de la question précédente ?

Écrire un script qui trace sur un même graphique les valeurs approchées de y_1 en fonction de celles de y_2 et leurs valeurs exactes pour les paramètres ci-dessus et la condition initiale `[14,6]`.

Rappels

1°) Runge-Kutta – La méthode de Runge-Kutta classique pour obtenir des valeurs approchées d'une solution d'une équation d'ordre 1 et de rang p (*i.e.* d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$)

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) & \forall t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

consiste à calculer y_{n+1} au temps $t_{n+1} = t_n + h$ à partie de y_n au temps t_n par

$$\begin{aligned} &k_1 = f(y_n) \\ &k_2 = f(y_n + (h/2)k_1) \\ &k_3 = f(y_n + (h/2)k_2) \\ &k_4 = f(y_n + (h/2)k_3) \\ &y_{n+1} = y_n = (h/6)(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4) \end{aligned}$$

2°) Intégrales Première – Une intégrale première d'une équation différentielle d'ordre 1 et de rang p comme ci-dessus est une fonction $H : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ constante sur les trajectoires, c'est-à-dire telle que $H(y(t))$ soit indépendante du temps. Ceci se réécrit

$$\frac{d}{dt} H(y(t)) =< \nabla H, f >= 0$$

ou encore si y_i sont les coordonnées de y et f_i celles de f :

$$\sum \frac{\partial H}{\partial y_i}(y) f_i(y) = 0.$$

À rendre à la fin du TP par courrier électronique