UFR Mathématiques — Université Rennes 1

Licence 2ème année — Année 2006/2007

Étude de fonctions, équations différentielles
TP2 – Résolutions approchées d'équations différentielles

Le but de ce TP est d'utiliser le schéma numérique de résolution d'Euler pour étudier certaines équations différentielles. Nous allons appliquer le schéma d'Euler à la résolution d'équations que l'on sait résoudre analytiquement afin de comparer le résultat obtenu par la résolution numérique à la solution analytique.
Rappellons que la méthode d'Euler consiste à obtenir des valeurs approximatives pour les valeurs en certains temps t_n d'une solution V d'une équation différentielle

$$\frac{dV}{dt} = f(t,V)$$

en l'approximant localement par sa tangente. On obtient la valeur approchée $\overline{V}_{n+1}$ en t_{n+1} à partir de la valeur approchée $\overline{V}_n$ en t_n par

$$\overline{V}_{n+1} = \overline{V}_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, \overline{V}_n).$$

Exercice 0 – Illustrez sur un dessin ce que donne cette méthode pour obtenir les valeurs approchées d'une solution de $\frac{dV}{dt} = V$ en les entiers.

I - Chute d'un corps

La vitesse d'un corps en chute libre sous la seule action de la pesanteur dans l'atmosphère est donnée par le principe fondamentale de la dynamique. Elle est solution de l'équation différentielle suivante :

$$m\frac{dV}{dt} = -kV^2 + mg$$

avec :

- $V(t)$ en m/s : la vitesse du corps au temps t,
- m =70Kg : masse du corps,
- g=9,81N/Kg : accélération de la pesanteur,
- k=0,27Kg/m : résistance de l'air,
- $0 \le t \le 20$s : intervalle de temps sur lequel on cherche la solution,
- $V(0)$=0 : la condition initiale.

1°) Résolution numérique – Écrire une fonction MATLAB `chute.m` calculant les valeurs approchées de la solution ayant pour condition initiale $V(0)$=0 sur l'intervalle de temps considéré pour un pas $h = 0{,}1$s (*i.e.* $t_{n+1} = t_n + h$).

2°) Résolution analytique – Résolvez l'équation sur une feuille pour la condition initiale donnée.
Indication : faites un changement de variable pour obtenir l'équation $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$.

3°) Comparaison – Tracez le graphe donnant les valeurs approchées et comparez le au graphe de la solution analytique. Tracez le graphe donnant les erreurs de la résolution approchée.

II- Dynamique de population

La variation de la population $y(t)$ d'une espèce animale dans un milieu donné est modélisée en exprimant que son taux de croissance à l'instant t : $\frac{y'(t)}{y(t)}$ est une fonction affine de sa population :

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = a_1 - a_2\, y(t).$$

La terme $a_2\, y(t)$ exprime la décroissance due au ressources limitées du milieux. – *Que représente le terme a_1 ?*–

1°) Résolution numérique – Écrire une fonction `[t,y]=Pop_Euler(a1,a2,t0,y0,T,h)` qui donne des valeurs approchées par la méthode d'Euler de la solution ayant comme donnée initiale `(t0,y0)` sur l'intervalle `[t0,t0+T]`. L'entrée `h` est le pas de la résolution et `t` est un vecteur ligne contenant les abscisses de calcul.

1°)^{bis} – Modifiez cette fonction pour que `y` puisse être un vecteur colonne.

2°) Résolution analytique – Résolvez cette équation différentielle sur du papier.

3°) Comparaison – Tracez sur un même graphique les graphes obtenus dans les cas `t0=0;T=5;y0=15; a1=2;a2=0.1` et `h=T/2^(I+2)` pour `I=1,...,6`.

Tracez le graphe donnant les erreurs de la résolution approchée puis le logarithme en base 2 des quotients de deux erreurs successives. Comment varient les erreurs ?

À rendre au prochain TP :
– l'`Exercice 0`,
– la partie II - Dynamique de population.