UFR MATHÉMATIQUES — UNIVERSITÉ RENNES 1
Licence C02 - Étude de fonctions - Équations différentielles — Printemps 2007

Devoir à la maison
– À rendre la septième semaine –

Ce devoir se compose de questions de cours – en *italique* dans le texte – et d'exercices. Caculatrices ou ordinateurs peuvent être utiliser pour vérifier le dessin du graphe d'une fonction MAIS tous les éléments permettant d'effectuer ce dessin doivent être justifiés.

COURBES $y = f(x)$

Le but de cette partie est d'apprendre à tracer grossièrement le praphe d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}$. Nous nous placerons dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Le graphe d'une fonction est l'ensemble des points P de coordonnées $(x, f(x))$ obtenues lorsque x parcours l'ensemble de définition de f. Le point de départ sera létude de la variation de f dont on tirera une esquisse trés grossière du graphe. Celle-ci sera affinée grace aux résultats ci-dessous. La fonction f sera supposée de classe $\mathscr{C}^k$ avec k suffisamment grand.

Commençons par quelques rappels sur la périodicité et les symétries.

1. — Périodicité. Une période de f est un nombre T tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout x dans D. – *Quelles sont les périodes de* $\tan(x)$ *?* – En connaissant une période T on peut tracer le graphe de f à partir de sa partie qui est au-dessus de $[0, T]$ en utilisant des translations. On a évidemment intérêt à chercher la plus petite période possible. – *Pourquoi existe-t-elle ? Que pouvez-vous dire de la plus petite période d'une fonction continue non constante ?* –

Exercice 1.1. Tracez le graphe de $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ et de $g(x) = \tan(3x + \sqrt{\pi})$.

2. — Symétries. Les symétries que nous regarderons ici sont les symétries par rapport à un axe ou à un centre. L'axe Oy est axe de symétrie d'une fonction f si et seulement si celle ci vérifie

$$f(-x) = f(x) \text{ (on dit que } f \text{ est paire).}$$

Plus généralement f admet comme axe de symétrie la droite déquation $x + b = 0$ si et seulement si la fonction vérifie

$$f(\alpha - x) = f(x).$$

Exercice 2.2. Quelle identité vérifie une fonction dont le graphe admet pour symétrie une droite d'équation $y + ax + b = 0$? Donnez un exemple ne rencontrant pas son axe de symétrie. Peut-on avoir $a = 0$?

L'origine du repère est centre de symétrie du graphe de f si et seulement si

$$f(-x) = -f(x) \text{ (on dit que } f \text{ est impaire).}$$

Exercice 2.3. Quelle identité vérifie une fonction dont le graphe admet pour centre de symétrie le point de coordonnées (a, b) ?

Ces symétries (translations, axiales ou centrales) peuvent se combiner.

Exercice 2.4. Quel combinaison de symétrie est vérifiée par le graphe d'un fonction satisfaisant l'égalité $f(x+t) = -f(x)$ pour tout x dans le domaine de définition de f et un t fixé ?

Exercice 2.5. Après avoir étudié la périodicité et les symétries de la courbe d'équation $y = (\sin x)^3 + (\cos x)^3$, tracez-la .

Exercice 2.6. Montrez que le graphe d'un polynôme de degré égal à trois admet un centre de symétrie.

3. — Tangentes spéciales. Lors de l'étude de la variation de f vous avez déterminer les points de la courde d'équation $y = f(x)$ dont la tangente est horizontale (*i.e.* dont l'abscisse a vérifie $f'(a) = 0$). – *Quel est l'équation de la tangente à au graphe de f en un point d'abscisse a ?* – D'autres tangentes peuvent être utile pour dessiner le graphe de f. – *Donnez un exemple de graphe admettant une tangente verticale.* –

4. — Concavité - Convexité. Une fonction f est dite convexe sur $[a, b] \in D$ si pour tout couples (x_1, x_2) de points du segment, on a l'inégalité suivante

$$f(x_1 + tx_2) \leq f(x_1) + tf(x_2) \quad \forall t \in [0, 1]$$

et concave lorsque l'inégalité est renversée. – *Donnez des exemples de fonctions concaves et convexes.*–

Exercice 4.7. Soient $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$, A le point de coordonnées $(a, f(a))$, M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et H le point de la tangente à $\mathscr{C}$ en A d'abscisse x. Montrez que f est convexe (resp. concave) au voisinage de a si l'ordonnée de M est supérieur (resp. inférieure) à celle de H. Puis en utilisant la formule de Taylor calculez $\overline{HM}$ et déduisez-en que f est convexe (resp. concave) au voisinage de a si $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$).

Un point de changement de convexité (*i.e.* d'abscisse a telle que $f''(a) = 0$) est appelé point d'inflexion. – *Dessinez le graphe d'une courbe au voisinage d'un point d'inflexion d'abscisse a lorsque $f'''(a) > 0$ puis lorsque $f'''(a) < 0$. Que peut-il se produire lorsque $f'''(a) = 0$?* –

Exercice 4.8. Dessinez l'arc de courbe d'équation $y = x^4 - 5x^3 + 8x^2$ pour x entre 0 et 1.

5. — Branches infinies. Une courbe $\mathscr{C}$ est dite avoir une branche infinie si un point M peut parcourir cette branche de courbe de telle sorte que la distance OM augmente indéfiniment. Il y a deux situations produisant des branches infinies.

Premier cas, si f admet une limite infinie à droite ou/et à gauche en un point x_0. La droite vertical passant par x_0 est dite asymptote à la branche de la courbe considérée à droite ou/et à gauche suivant les limites. – *Donnez des exemples de branche admettant des droites asymptotiques seulement à droite, seulement à gauche puis à droite et à gauche.* –

Dans le deuxième cas, x tend vers plus ou moins l'infinie. Dans le cas où x tend vers $+\infty$, on définie la direction asymptotique la direction de la droite de pente $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ lorsque cette limite existe.
– *Laquelle des fonctions $f(x) = x \sin x$ et $g(x) = (\sin x)/x$ n'a pas de direction asymptotique. Faites un dessin.* – Le situation en $-\infty$ est la même *mutatis mutandis*[1]. – *Les courbes donnée par les équations $y = x^2$ et $y = \sqrt[3]{x}$ ont-elles des directions asymptotiques* –. Lorsque la courbe admet une direction asymptotique non verticale, on cherche a savoir si elle admet une asymptote. Si la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \right) x \right)$$

existe et est fini, la droite d'équation

$$y = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \right) x + \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \right) x \right)$$

est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. – *Démontrez que la distance entre le point $(x, f(x))$ et la droite en question tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.* – En $-\infty$, . . .

t.p.s.v.p. ⇒

[1] c'est une locution adverbiale latine signifiant "ce qui doit être changé étant changé"

Exercice 5.9. Dessinez (= étudiez les variations, periodicité, symétries, concavité-convexité et branches infinies puis résumez sur un dessin) les courbes d'équations

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}\ , \qquad y = xe^{-1/x}\ , \qquad y = (1+\tan x)^{\sin x}$$

SOLUTIONS DE $y' = y^2 - x$

Le but de cette partie est d'appliquer la première partie pour le portrait de phase de l'équation de Riccati :

$$y' = y^2 - x.$$

Le graphe d'une solution de cette équation détermine une courbe dans $\mathbb{R}^2$ (munit des coordonnées (x, y)). Le portrait de phase d'une équation différentielle comme celle-ci est le dessin sur le plan des graphes de solutions typiques ainsi que de zones où le comportement des solutions est spécial.

1 – On rappelle qu'une isocline de pente p de notre équation est une courbe de $\mathbb{R}^2$ constituer des points (x, y) où passe une solutions ayant une pente p en ce point. Dessinez les isoclines de pentes -2 -1, 0, 1 et 2.

2 – Les solutions ont-elles toutes un minimum ? un maximum ?

3 – Dessinez les zones du plan où les solutions sont convexes et celles où les solutions sont concaves.

4 – Esquissez 5 ou 6 solutions qui reflètent les différents comportements possibles des solutions.

5 – Discutez suivant les cas, la nature des branches infinies des solutions.

6 – Existe-t-il une solution tendant vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et ayant comme direction asymptotique l'axe Ox ? Justifier votre réponse en utilisant le "théorème des segments emboités" [2].

7 – Utilisez MAPLE (ou tout autre logiciel dessinant des portrait de phases) pour vérifier vos dessins.

8 – Savez-vous résoudre cette équation ?

[2] aussi connu sous les noms de théorème des suites adjacentes ou théorème des gendarmes etc ...