

Contrôle continu 1h30
mercredi 16 octobre 2019
Produits de Blaschke

Notations

On notera \mathbb{D} le disque unité, \mathbb{S}^1 l'ensemble des nombres complexes de module 1 ($\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$). Pour $a \in \mathbb{D}$ non nul, on note $B_a(z) = \frac{|a|}{a} \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ et $B_0(z) = -z$. Pour une suite finie $A = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{D}^m$ on notera

$$B_A(z) = \prod_{k=1}^m B_{a_k}(z).$$

Pour une suite finie A on notera n le nombre d'occurrence de 0 et A' la suite des termes non nuls de A . On notera $B_{\emptyset}(z) = 1$.

Questions de cours

Énoncez le lemme de Schwarz.

Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe s'annulant en 0 alors pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq |z|$

Produits finis

1. Montrez que $B_a(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.

Puisque cette homographie transforme les cercles en des cercles ou des droites, il suffit de calculer l'image de trois points du cercle unité ou encore de vérifier que si $z\bar{z} = 1$ alors le module du numérateur $z - a = 1 - a\bar{z}$ est le module du conjugué du dénominateur.

2. Montrez que pour $c \in \mathbb{D}$ la fonction $B_A(z) - c$ s'annule m fois (comptés avec multiplicité), puis que que ses zéros sont dans \mathbb{D} .

Le numérateur de cette fonction est un polynôme de degré m . De plus si $z \notin \mathbb{D}$ alors $|B_a(z)| > 1$ et a fortiori le produit de tels termes a un module supérieur à 1 contrairement à c .

3. Si $h \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, montrez qu'il existe $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tel que $B_A \circ h = \lambda B_{h^{-1}A}$ où $h^{-1}A$ est la suite $(h^{-1}(a_1), \dots, h^{-1}(a_n))$.

Il suffit de le vérifier pour chaque facteur du produit. Ces facteurs sont des automorphismes de \mathbb{D} la composition de B_a avec h est un automorphisme s'annulant en $h^{-1}(a)$. A un multiple de module 1 près c'est $B_{h^{-1}(a)}$.

4. Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe s'annulant sur les éléments de A avec multiplicités au moins celles de B_A . On veut montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$ $|f(z)| \leq |B_A(z)|$

On suppose $a_1 = 0$ et on pose $F(z) = \frac{f(z)}{z^{n-1} B_{A'}(z)}$.

- (a) Montrez que F est holomorphe sur \mathbb{D} et s'annule en 0.

En les zéros du dénominateur, le numérateur s'annule au moins autant de fois, le quotient est holomorphe en ces points. Ailleurs il n'y a pas de problème. Le numérateur s'annule n fois en 0, le dénominateur $n-1$ fois. Le quotient s'annule un fois en 0

- (b) Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r \in]0, 1[$ (proche de 1) tel que $\max_{\partial D(0,r)} |B_{A'}| \geq 1 - \varepsilon$.

Les homographies étant continues, les images de compacts proches sont des compacts proches. D'après la première question l'image de \mathbb{S}^1 est \mathbb{S}^1 : pour tout ε , il existe un R tel que les cercles de rayon $r > R$ sont envoyés à distance moins de ε de \mathbb{S}^1 . Ce ci prouve plus que l'inégalité souhaitée

- (c) Dédisez-en que sur $D(0, r)$ $|F(z)| \leq \frac{1}{r^{n-1}(1-\varepsilon)}$, puis que $|F| \leq 1$ sur \mathbb{D} .

Montrons cette inégalité sur le bord du disque. En appliquant le résultat précédent à $B_{A'}$ et en écrivant que $|z| = r$ et $|f| < 1$, nous avons l'inégalité souhaitée. Le principe du maximum nous donne l'inégalité sur tout le disque. Il nous donne aussi cette inégalité pour toutes les valeurs de r plus grand que celle déterminée à la question précédente. En laissant r tendre vers 1 puis ε tendre vers 0 nous avons $|F| \leq 1$.

- (d) Concluez

Au vu de la question 2, nous pouvons, quitte à composer avec un automorphisme h , supposer que $a_1 = 0$ la question 3 donnera que $f \circ h \leq B_A \circ h$. La composition avec h^{-1} donne l'inégalité.

5. Montrez que pour tout indice k , $|f'(a_k)| \leq |B_{A'}'(a_k)|$.

La dérivée en a_k est la limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{1}{h}(f(a_k + h) - f(a_k))$. Puis que $f(a_k) = 0$, le passage la limite dans l'inégalité montrée en 4 donne l'inégalité souhaitée.

6. Montrez que si il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ n'apparaissant pas dans A tel que $|f(z_0)| = |B_A(z_0)|$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tel que $f = \lambda B_A$

Reprenons les notations de la question 4. La fonction holomorphe F est bornée en module par 1 si elle atteint cette borne dans le disque, le principe du maximum nous assurera qu'elle sera constante et en module égale à 1.

7. Déduez des question précédentes que si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est holomorphe et $a \in D$ alors pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| \quad \text{et} \quad |f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

Si f est holomorphe alors $B_{f(a)} \circ f$ est une fonction holomorphe du disque dans le disque qui s'annule en a . Elle est donc tout le temps majorée par B_a en module. Après avoir multiplié l'inégalité par le dénominateur du premier membre et divisé par le numérateur du second membre, un passage à la limite lorsque z tend vers a donne la seconde inégalité.

Produits infinis

Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite infinie d'éléments de \mathbb{D} . On veut montrer qu'il existe une fonction holomorphe bornée sur \mathbb{D} s'annulant exactement sur les a_k comptés avec multiplicité si et seulement si $\sum(1 - |a_k|)$ converge. Nous montrerons une implication lors de cet examen, la seconde est laissée à faire chez vous.

1. Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{D} . Justifiez le fait que les zéros de f forment un ensemble fini ou dénombrable.

Dans chaque disque ferme $\overline{D}(0, r) \subset \mathbb{D}$ le principe des zéros isolés assure qu'il n'y a qu'un nombre fini de zéros. En comptant les zéros par paquets dans $\overline{D}(0, 1 - 1/(n+1)) - \overline{D}(0, 1 - 1/n)$, nous obtenons la dénombrabilité de cet ensemble.

2. Supposons que $\sum(1 - |a_k|)$ converge .

(a) Montrez que $1 - B_{a_k}(z) = (1 - |a_k|) \frac{1 + (|a_k|/a_k)z}{1 - \overline{a_k}z}$.

En mettant les deux membres sur le même dénominateur et en comparant les numérateurs on remarque l'égalité

(b) Déduez-en que sur $D(0, r) \subset \mathbb{D}$, $|1 - B_{a_k}(z)| \leq (1 - |a_k|) \frac{1+r}{1-r}$

Nous montrerons cette majoration sur le bord du disque, le principe du maximum la donnera à l'intérieur. Le numérateur se majore avec l'inégalité triangulaire. Le dénominateur se minore avec " la seconde " inégalité triangulaire.

(c) Concluez.

La majoration précédente et l'hypothèse faite sur les a_k nous permettent d'utiliser le théorème de convergence des produits. Le produit de Blaschke $\prod_{k=1}^{\infty} B_{a_k}(z)$ converge sur tout disque ferme inclus dans le disque unité vers une fonction holomorphe dont les zéros sont ceux des facteurs. Nous avons donc construit une fonction bornée par 1 (en tant que produit de facteurs bornés par 1) s'annulant là où nous le souhaitons.