Alain Albouy, rapport pour la période 12/05-05/06

Des problèmes de mécanique et de physique très divers se rangent facilement dans une des deux classes : intégrable et non intégrable. En examinant des listes de problèmes, on constate que l'intégrabilité est associée à l'existence d'intégrales premières. On constate aussi que les formules donnant ces intégrales premières ne sont pas très compliquées, même quand elles sont difficiles à prévoir.

Mes travaux récents portent sur les intégrales polynomiales des équations de la forme $\ddot q=f(q)$ (un corps de position q se déplace dans l'espace affine soumis à champ de force dépendant de la position). J'ai remarqué qu'une symétrie d'échange (position, vitesse) apparaît dans le terme de plus haut degré des intégrales premières quand on projectivise le système, en suivant les idées d'Appell.

Comme plusieurs systèmes se projectivisent de la même façon, plusieurs Hamiltoniens peuvent coexister. J'avais aperçu la relation entre ``bihamiltonianité" et existence de deux intégrales premières quadratiques.
Lors de mon exposé à la réunion Darboux organisée par Alexei Tsygvintsev, Maria Przybylska a rapproché ces idées des idées récentes de Hans Lundmark, qui travaille en Suède. Si l'idée de bihamiltonianité est parfaitement étudiée par Lundmark, le lien avec les idées d'Appell reste à faire. La projectivisation clarifie beaucoup sa théorie. Je termine un article sur le sujet.

Compte-rendu du mois de mai pour l'ANR

Delphine Boucher
IRMAR, Rennes

Suite à la réunion Darboux à Lyon au mois de mars 2006, j'ai pu orienter légèrement mes travaux.
Un premier objectif est d'étudier les déformations des systèmes différentiels linéaires qui

1. permettent de lire sur le système le comportement local des solutions (log ou non, Stokes ou non ...)
2. s'adaptent bien au cas paramétré dans le cas où aucune condition arithmétique sur les paramètres n'apparaît dans un premier temps.

Pour cela, je dispose des travaux d'Arnold, de Turritin, de Wasow ainsi que des travaux qui en découlent et qui sont orientés vers le calcul formel (mais que je n'ai pas encore exploités) : Stolovich, Chen, ...
Je suis actuellement tournée vers le procédé de Turritin qui semble plus intéressant dans la mesure où il nécessite moins d'étapes de jordanisation que la méthode présentée à Lyon à la Wasow. Or dans le cas paramétré, la jordanisation d'une matrice et le calcul de la matrice de passage sont des opérations très lourdes.

La motivation de cette étude est toujours intacte : pouvoir appliquer le théorème de Morales-Ramis à des systèmes variationnels de taille $n \times n$ avec $n > 2$. En effet pour $n = 2$, on dispose de l'algorithme de Kovacic, mais pour $n > 2$, nous n'avons pas d'algorithme pour calculer le groupe de Galois différentiel de tels systèmes linéaires différentiels, même lorsque ceux-ci ne dépendent pas de paramètres. On utilise donc un critère déduit du théorème de Morales-Ramis basé essentiellement sur la présence ou non de logarithmes dans les solutions formelles du système normal variationnel.

Un deuxième objectif est d'étudier le comportement des transformations de Moser sur les systèmes différentiels hamiltoniens. La structure n'est pas conservée et l'on souhaiterait trouver de bonnes propriétés (des discussions à ce propos avec Jacques-Arthur Weil).
Je souhaiterais également calculer la transformation de Moser dans le cas paramétré.

Rapport d'activité – 6 mois

Guy CASALE – UAB
(Marie Curie postdoctoral fellowship)

Ma recherche porte sur l'étude des notions d'intégrabilité et de réductibilité de systèmes dynamiques dans un contexte algébrique sur $\mathbb{C}$. L'outil essentiel que j'utilise est le groupoïde de Galois introduit par B. Malgrange [1] comme généralisation non linéaire du groupe de Galois différentiel. Il permet de donner une définition de l'intégrabilité trés générale. Celle-ci est donné parla nullité de la dimension différentielle (au sens de Ritt-Kolchin) du groupoïde de Galois. Cette notion comprenant comme cas particuliers, l'intégrabilité à la Arnold-Liouville, l'intégrabilité Liouvillienne ou l'intégrabilité des systèmes dynamiques discret.

1 – Un premier thème de recherche pour ce projet est l'étude des systèmes hamiltoniens de dimension différentielle nulle. L'intégrabilité d'Arnold-Liouville est garantie sous certaines hypothèses sur le groupoïde de Galois du système. Parmis ces hypothèses, la nullité de la dimension différentielle et la commutativité semble les plus importantes.

Nous nous proposons de commencer par l'étude des systèmes hamiltoniens satisfaisant ces deux propriétés.

Par analogie avec le cas classique et le cas linéaire, la résolubilité du groupoïde de Galois semble être le cas d'intégrabilité le plus naturel. Il fera l'objet de la seconde partie de cette étude.

Tous les systèmes hamiltoniens de dimension différentielle nulle ne sont pas de ce type. Leur étude, entre autre de la topologie de leurs trajectoires, permettra de décider de la formulation "galoisienne" la plus adaptée de l'intégrabilité.

2 – Un deuxième thème de recherche porte sur les théorèmes de Moralès-Ramis. Ces théorèmes donnent des conditions d'intégrabilité portant sur le groupe de Galois du linéarisé le long d'une solution. Dans le cas où nous connaissons un famille de solutions, nous obtenons une famille d'équation linéaire. Les travaux récents de Cassidy et Singer [2] décrivent alors le groupe de Galois de cette équation à paramètre. Dans le cas intégrable, celui-ci est plus petit que la famille des groupes de Galois. Ceci donne des conditions supplémentaires à l'intégrabilité.

Le premier point a fait l'objet de discussion avec J.-P. Marco et J.-A. Weil lors de mon passage à Paris 6.

Le deuxième a été discuté avec J.-A. Weil lors de la rencontre *Darboux 2006* et lors du colloque *Renormalisation et Théories de Galois.*

References

[1] Malgrange, B. - *Le groupoïde de Galois d'un feuilletage*, Monographie **38** vol **2** de L'enseignement mathématique (2001) 465–501

[2] Cassidy P.J. et Singer M.F. - *Galois Theory of Parameterized Differential Equations and Linear Differential Algebraic Groups* To appear in the special volume dedicated to Andrey Bolibrukh, of the series "IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics" (2005)

Exposés :

1. *Galois theory for nonlinear differential equations : I -Definitions, II -Examples*
   - Séminaire de Géométrie et Mécanique (Paris 6), avril 2006
   - Séminaire de Géométrie (Universitat Autonoma de Barcelona), mai 2006
2. *Le groupode de Galois de P1 et son irréductibilité*
   - Séminaire Galois Différentiel (Lille), janvier 2006
   - Séminaire Équations Différentielles (Strasbourg), janvier 2006
   - Séminaire Géométrie Analytique (Rennes), janvier 2006
   - Rencontre Darboux 2006 (Lyon), mars 2006

Participations

1. *Rencontre Darboux 2006* (Lyon), mars 2006
2. *Renormalisation et Théories de Galois* (C.I.R.M.) mars 2006
3. *Dynamique et Géométrie Complexes* (C.I.R.M.) juin 2006

Publications/Preprints

1. *Local irreducibility of the first Painlevé equation* en préparation
2. *An introduction to the Galois groupoid of foliations : From Drach & Vessiot to Umemura & Malgrange* En préparation

Juan-Pablo Ortega, rapport pour la période 12/05-05/06

Mon activité de recherche pendant les six derniers mois s'est articulée autour de trois axes principaux :

1.-Propriétés de convexité métrique des applications moment symplectiques à valeurs dans un cylindre (en collaboration avec Petre Birtea (Timisoara, Roumanie) et Tudor Ratiu (EPFL, Suisse)) : nous étudions les propriétés de convexité de l'application moment introduite par Condevaux, Dazord et Molino qui généralise l'application moment classique de Kostant-Souriau. Étant donne que cette généralisation ne prend pas des valeurs dans un espace vectoriel, on se sert d'une généralisation de cette notion à des espaces métriques.

2.-Réduction et applications moment pour les variétés de Poisson (avec Rui Loja Fernandes (IST Lisbonne, Portugal) et Tudor Ratiu (EPFL, Suisse)) : la réduction de Marsden-Weinstein dans le cadre des variétés de Poisson n'est pas en general possible à cause de la non-existence générique des applications moment. Nous profitons du goupodïe symplectique qu'on peut associer a toute variété de Poisson pour contourner le problème.

3.-Formulation géométrique des principes variationnels de la mécanique en présence de perturbations stochastiques (en collaboration avec Andreu Lázaro (Universidad de Zaragoza, Espagne)) : formulation et résolution d'an principe variationnel dans lequel le temps et les variables spatiaux sont soumis a des perturbations stochastiques codées mathématiquement sous la forme d'une semimartingale. Notre approche reprend les travaux de Bismut des années 80.

Rapport pour la période 01/12/2005 – 31/05/2006

Maria Przybylska

May 29, 2006

On était attaqué trois problèmes pendant cette période:

1. quelles sont les conditions nécessaire pour l'intégrabilité non-commutative donné par la théorie de Morales et Ramis ?

2. l'application de la théorie de Morales-Ramis pour les systèmes des équations de Newton, est-ce-que c'est possible et quelles restrictions il faut imposer aux ces équations ?

3. fait une classification des potentiels homogènes intégrables avec trois degrés de liberté.

Ad 1.) Il y a les systèmes hamiltoniens intégrables avec l'ensemble des intégrales premières qui ne sont pas toutes en involution. On était démontré que si le système est intégrable avec des intégrales premières non-commutatives, l'algèbre de Lie du groupe de Galois différentiel des équations aux variations est abélienne, pour des détails voir [1]. Le demonstration repose sur une modification du lemme clé de géométrie symplectique.

Ad 2.) La théorie de Morales et Ramis concerne des systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité au sens de Liouville. Nous avons proposé pour des systèmes non-hamiltoniennes des équations de Newton la notion de l'intégrabilité au sens de Jacobi. On peut formuler pour ces systèmes avec des équations homogènes un critère de non-integrabilité base sur la non-commutation de l'algèbre de Lie du groupe de Galois différentiel des équations aux variations. Ces équations aux variations linéarisent nos équations de Newton le long d'une solutions particulière correspondantes des points de Darboux. Des résultats sont preparé pour la publication [2].

Ad 3.) Nous avons commencé des travaux sur la classification de tous potentiels homogènes avec trois degrés de liberté qui sont intégrable au sens de Liouville.

[1] A. J. Maciejewski, M. Przybylska, Differential Galois obstructions for non-commutative integrability, envoyé à *Nonlinearity*.

[2] M. Przybylska, Galoisian integrability analysis for homogeneous Newton equations, en preparation.

Rapport d'activité 01/05-01/06
Le projet "Intégrabilité" de l'ANR
A. Tsygvintsev

Voici un résume de deux sujets sur lesquels j'ai travaillé pendant les six derniers mois.

1. La question d'existence des intégrales premières algébriques des systèmes de la forme :

$$\dot{x} = p(x,y,z) \quad \dot{y} = q(x,y,z), \quad \dot{z} = r(x,y,z) \quad (*)$$

ou p, q, r sont des polynômes homogènes de degré 2.

J'ai abordé ce sujet de deux points de vue differents : locale et globale.

• Localement, on étudie le développement du système (*) au voisinage d'une orbite particulière donnée par un de ses points de Darboux. Si P était une intégrale première polynomiale de degré M, alors, en utilisant la homogénéité de (*), on montre qu'il existe une solution rationnelle d'un système de M équations différentielles linéaires aux trois singularités non régulières sur $\mathbb{CP}^1$. Localement, au voisinage de chaque de ces singularités, ce système s'écrit comme :

$$\frac{d\Theta}{du} = \left(\frac{\mathcal{A}_{-2}}{(u-\eta)^2} + \frac{\mathcal{A}_{-1}}{u-\eta} + \mathcal{A}_0 + O(u-\eta) \right) \Theta, \quad \Theta \in \mathbb{C}^M .$$

On a analysé quelques propriétés de ce système. L'idée est d'essayer d'utiliser la technique développée pour ce genre de problèmes linéaires (Wasow, Sibuya, Ramis) afin de retrouver les nouvelles obstructions à l'existence de P. Il paraît que cette approche n'a pas été encore abordé.

• Globalement, pour étudier l'existence des intégrales algébriques de (*), nous avons proposé d'utiliser l'approche de Ziglin dans le contexte suivant. Il est connu qu'en général le système (*) n'a pas de solutions particulières assez compliques pour que le groupe de monodromie (le group de Galois) contiendrait les obstructions à l'intégrabilité. Notre idée, en cours de développement, est d'utiliser $P(x,y,z)$ *lui même*, pour générer le groupe de monodromie assez riche au voisinage d'une feuille invariante algébrique définie par P. En étudiant ce groupe on espère retrouver des obstructions fortes à l'existence de P. Une prépublication est en vue.

2. La non intégrabilité de la modèle non holonome du rattleback

C'est un système non holonome de 6 équations sans mesure invariante connue. Il possède toujours deux intégrales premières. Pour montrer l'absence des mouvements chaotique, en cas général, il suffit d'avoir deux intégrales en plus. Il arrive que ce système possède une solution particulière dont l'équation normale aux variations E est fuchsienne. Le groupe de monodromie G de E est un sous groupe de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ avec deux générateurs. L'étude de G représente les difficultés considérables puisque le système initial n'était pas hamiltonien et donc les simplifications usuelles du type "découplage" ne sont pas présentes. Ce groupe peut être étudie en partie à l'aide des méthodes du calcul formel (D. Boucher). Une prépublication est en vue.

Nguyen Tien Zung, rapport pour la période 12/05-05/06

Obstructions galoisiennes à l'intégrabilité des systèmes non-hamiltoniens:

Michael Ayoul (mon étudiant de thèse) et moi nous sommes en train d'étendre les résultats de Morales, Ramis et Simo au cas de systèmes non-hamiltoniens. Le résulats principal est que si un système (non-hamiltonien) est intégrable alors les groupes de galois différentiels sont essentiellement abeliens, comme dans le cas hamiltonien. Nous allons appliquer ce résultats aux divers systèmes non-holonomes.

Singularités de systèmes de Gelfand-Cetlin

Avec mon étidiante Iman Allamiddine et mon post-doc Eva Miranda, nous sommes en train d'étudier les singularités de systèmes de Gelfand-Cetlin. Ces sytèmes ont des singularités particulières que nous n'avons pas observé dans l'étude des autres systèmes intégrables bien-connus.