Description du projet et résultats attendus *:*

Titre du projet : Intégrabilité réelle et complexe en Mécanique Hamiltonienne

Un système Hamiltonien est dit intégrable s'il a suffisamment de lois de conservation i.e d'intégrales premières comme l'énergie, le moment cinétique, etc.
Depuis cinquante ans, il existe une grande variété de résultats concernant les systèmes intégrables. En particulier, on observe qu'ils sont localement "tous semblables" dans le sens où le mouvement d'un tel système est (en dehors des singularités) un mouvement quasi périodique sur des tores. Par contre, les
systèmes non-intégrables sont "tous différents" et la nature de leur non intégrabilité est spécifique dans chaque cas particulier. Ce thème a rencontré récemment un vif regain d'intérêt, à travers les travaux notamment de Morales & Ramis (voir l'exposé de M. Audin au séminaire Bourbaki [1] pour un panorama des travaux récents, incluant les notres) et le développement de méthodes de calcul formel pour l'étude des équations différentielles.

Notre équipe développe des outils théoriques et pratiques des théories de l'intégrabilité complexe et réelle (existante déjà depuis Poincaré) vus comme complémentaires plutôt qu'en opposition. Les membres possèdent des compétences nécessaires pour approcher ce problème d'un point de vue théorique en utilisant les méthodes modernes de l'algèbre, la théorie des groupes etc, d'un point de vue effectif en développant des algorithmes de calcul formel ou numérique, et d'un point de vue concret en s'attachant à des problèmes issus de la mécanique.

Le soutien à ce projet permettrait :

1. D'organiser un groupe de travail (sur 3 jours, 4 séances par an) entre nos sites.

2. D'acquérir des ordinateurs (et logiciels afférents) dédiés aux expériences formelles et numériques (calculs assez lourds).

3. De favoriser la diffusion de ces méthodes nouvelles et renforcer les interactions (en France et à l'étranger), notamment par l'organisation d'un colloque fin 2006 et d'une école d'été en fin de projet.

A ce jour, la théorie d'intégrabilité moderne compte parmi ses méthodes principales :

- La méthode directe : on cherche des intégrales premières sous une forme particulièrement simple, par exemple comme des polynômes. Cette méthode est très souvent utilisée dans l'analyse des équations de la mécanique mais nécessite souvent de très gros calculs.

- Les méthodes perturbatives, comme la théorie KAM conduisant à la notion d'intégrabilité sur un feuilletage cantorien, la méthode de Poincaré-Melnikov fournissant des résultats de non-integrabilité, et les idées développées récemment dans le cadre de la diffusion d'Arnold. Ces méthodes s'appliquent au cas d'un système hamiltonien suffisamment proche d'un système intégrable, néanmoins elles constituent une part très élaborée de la théorie d'intégrabilité réelle.

- Les techniques de type complexe : utilisées depuis les années quatre-vingt (travaux de Morales, Ramis et Ziglin) elles sont beaucoup plus puissantes que les techniques réelles en restant à la fois trop formelles car la non-intégrabilité complexe capte mal le comportement des solutions réelles.

Les interactions concrètes entre ces trois approches sont peu nombreuses et un des objectifs de notre projet est de les favoriser tout en respectant les particularités de chacune de ces approches.

La mécanique céleste fournit les problèmes d'intégrabilité les plus profonds, avec des implications fondamentales pour l'astrophysique, la théorie du système solaire aussi bien que les missions spatiales. Nous souhaitons établir une véritable collaboration avec des chercheurs venant de ce domaine (A.

Albouy). Dans ce cadre notre sujet d'intérêt sera bien sûr l'étude du problème des n corps.

Nous voulons maintenant préciser ici nos objectifs.

Dans ses Principia, après avoir résolu le problème képlérien de deux corps (qui décrivent toujours des trajectoires coniques), Isaac Newton considérait un système constitué par le Soleil, la Terre et la Lune. Le problème des trois corps ainsi posé, où l'on considère trois masses ponctuelles en interaction gravitationnelle, ne fait intervenir qu'un corps de plus par rapport au problème képlérien, mais il s'est avéré infiniment plus complexe. Du point de vue analytique, le problème des trois corps dans le plan est un système de six équations différentielles dont les solutions possèdent une extrême sensibilité aux conditions initiales. A la suite des travaux de Poincaré, Moser, Kolmogorov et Arnold, on appelle maintenant ce phénomène le ‘’chaos déterministe''.

Dans notre projet, nous attaquerons les origines profondes de cette sensibilité, qui par exemple est responsable de l'imprévisibilité à très long terme du mouvement de la Lune. Cette étude fait partie de la théorie la plus générale, celle de l'intégrabilité où l'on étudie des transcendantes nouvelles qui apparaissent comme des solutions et des intégrales premières (i.e lois de conservation) des équations différentielles. C'est pour cela que, en suivant le chemin indiqué par Kovalevskaya et Painlevé, il faut sortir du domaine réel et étudier des fonctions complexes multiformes. C'est ce phénomène de multiformité, "invisible" d'un point de vue réel, qui nous intéresse et qui nous guidera dans notre tentative de comprendre l'origine de la complexité des solutions réelles.

Parmi nos techniques, nous disposons du théorème de Morales et Ramis [9,10] qui permet de montrer que certains systèmes Hamiltoniens ne sont pas intégrables en utilisant un groupe de Galois différentiel, ainsi que de l'approche de Ziglin [14] basée sur le groupe de monodromie et des méthodes récentes de calcul formel pour l'étude des équations différentielles.Une synthèse fructueuse de ces méthodes a permis de démontrer la non-intégrabilité méromorphe du problème des trois corps [3,4,5] (D. Boucher, A.Tsygvintsev) au voisinage de la solution parabolique de Lagrange. Inspirés par ce résultat, nous comptons continuer dans la même direction.

Dans un premier volet, nous souhaitons évaluer maintenant des groupes de Galois différentiels des solutions elliptiques et hyperboliques de Lagrange dans le problème des trois corps. Cela nous permettra de répondre à la question suivante : comment ce groupe se transforme-t-il d'une solution à une autre ? C'est ainsi que l'on arrive à l'autre question beaucoup plus ambitieuse: quelle est la structure du groupe de Galois non linéaire dans le problème des trois corps ? Pour nous c'est un objet qui unifie tous les groupes linéaires de Galois des solutions individuelles. On peut envisager ici des applications pratiques de la théorie de Malgrange des groupoïdes de Galois [20], et mieux comprendre ainsi cette théorie (G. Casale). Notre stratégie sera de calculer et classifier des groupes de Galois non linéaires pour des systèmes classiques intégrables dont les solutions générales sont bien connues. La mécanique classique nous fournit ici des exemples riches mais très peu étudiés jusqu'à maintenant. La démarche consistant à établir une méthodologie à partir de l'étude systématique d'exemples mécaniques s'est déjà avérée très fructueuse dans nos premiers travaux communs.

Dans un deuxième volet, nous continuerons d'améliorer l'utilisation pratique du théorème de Morales-Ramis du point de vue effectif. L'application de ce théorème nécessite théoriquement le calcul (de la composante connexe du neutre) du groupe de Galois différentiel d'une équation différentielle linéaire d'ordre pair, à coefficients polynomiaux ou analytiques et à paramètres, appelée "équation aux variations" (les paramètres représentent des données physiques du problème, par exemple des masses).
Actuellement des algorithmes existent uniquement pour les équations d'ordre deux et trois [7,12,13]. De plus, en général, la présence des paramètres rend l'utilisation de ces algorithmes très problématique. Mais la structure symplectique de l'équation aux variations et les contraintes sur les paramètres (une masse est représentée par un paramètre réel positif) permettent d'appliquer le théorème plus facilement via les outils du calcul formel (logiciels Maple et Magma). Ces deux derniers points ont joué un rôle clé dans

l'établissement de la non complète intégrabilité des problèmes traités jusqu'alors et demandent encore à être affinés afin d'approfondir une méthodologie systématique qui facilite la mise en oeuvre pratique des critères d'intégrabilité.

Voici les autres sujets que nous souhaitons aborder dans notre projet :

1. Trouver les applications de la théorie de Morales-Ramis dans le cas des systèmes hamiltoniens avec plus de deux degrés de liberté.

Il y a des exemples classiques ici, ceux des systèmes hamiltoniens avec n degrés de liberté aux potentiels homogènes. Grâce à des symétries riches les équations variationnelles dans ces cas se décomposent en produit d'équations du deuxième degré, facile à étudier. Des exemples d'équations variationnelles d'ordre
supérieur à 2 sont peu nombreuses [2,8,11] et les membres de notre équipe ont déjà commencé à travailler dans cette direction ([3-5], [18]). Notre approche est d'étudier la relation étroite entre des invariants du groupe de Galois différentiel et des symétries de Lie du système. On envisage aussi de développer
le résultat de [4] manifestant la relation étroite entre la non-intégrabilité et la présence de termes logarithmiques dans les solutions formelles. Enfin nous travaillons à incorporer les développements récents sur l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre quatre. Ainsi trois thèses récentes (Hessinger, Cormier, Gaillard) devraient êtres utiles dans l'approche des problèmes posés. Il est également intéressant d'étudier les équations variationnelles à coefficients méromorphes e.g fonctions de Weierstrass (J.-A. Weil).

2. Comprendre mieux la géométrie de systèmes hamiltoniens et géométrie de structures de Poisson.

En particulier, étudier les formes normales de structures de Poisson; formes normales de systèmes hamiltoniens sur les variétés de Poisson (travaux joints de T.-Z. Nguyen avec P. Monnier et E. Miranda) ; singularités de systèmes intégrables en relation avec la théorie de Galois différentielle.

3. Théorie de Galois différentielle et non-intégrabilité de systèmes non-holonomes.

Un des membres de notre projet (T.-Z. Nguyen et son étudiant M. Ayoul) travaille actuellement sur la généralisation du théorème de Morales-Ramis au cas de systèmes non-hamiltoniens.

4. Etudier les méthodes perturbatives purement réelles :

4.1 (J.-P. Marco) : Le premier but est d'essayer de définir une notion d'écart intrinsèque à l'intégrabilité, en utilisant des invariants de type dynamique (réelle), qui sont redevables a priori d'estimations quantitatives. La mesure ou la capacité d'ensembles errants est un exemple [16, 17], mais ce n'est pas le seul.
L'entropie topologique en est un autre, comme aussi l'écart (splitting) des variétés invariantes des objets hyperboliques [15], dont on sait qu'il est (au moins naïvement) relié directement à la non-intégrabilité (lien avec les travaux de Dovbish). Idem pour les barrières de Peierls, qui sont très proches de la
notion de splitting,et définies pour des objets plus généraux dans les systèmes convexes. Les études portent sur des systèmes analytiques, mais aussi ultradifférentiables (classes Gevrey ou Carleman plus générales), dans lesquelles les exemples sont plus faciles à construire.

Outre les applications possibles au problème de la diffusion d'Arnold (dérive générique des variables d'action dans les perturbations d'un système intégrable), notre approche aura pour but d'examiner les conditions sous lesquelles la présence de perturbations détruit un tore invariant Lagrangien à dynamique quasi-périodique. On sait en effet que dans le cadre des fonctions indéfiniment différentiables la condition Diophantienne usuelle est nécessaire et suffisante pour assurer la persistance du tore sous perturbations. Dans le cas analytique la condition Diophantienne de Brjuno

est suffisante, mais on ne
sait pas montrer qu'elle est nécessaire (comme par exemple dans le cas de la dynamique holomorphe). L'utilisation de classes de régularité intermédiaire permet d'espérer mieux comprendre ces phénomènes, et s'insère naturellement dans notre problématique d'étude de la complexité des systèmes hamiltoniens.

4.2 (J.-P. Ortega) : Théorie de la réduction des systèmes hamiltoniens. Dynamique des systèmes hamiltoniens symétriques. Existence de solutions critiques relatives et leur stabilité.

5. Classifier des potentiels homogènes intégrables avec au moins trois degrés de liberté.

Un des membres de notre projet (M. Przybylska en collaboration avec A. Maciejewski) a obtenu récemment la classification complète de tous les potentiels intégrables avec deux degrés de libertés [8].

6. Développer les méthodes constructives d'étude des équations variationnelles d'ordre supérieur.
On envisage des interactions avec l'équipe de C. Simo, J. Morales et J.-P. Ramis.

7. Etablir la place de la théorie de Malgrange du groupoïde de Galois dans la théorie de la non-intégrabilité.

Les méthodes développées dans la thèse de G. Casale [19] seront sans doute ici d'un intérêt particulier.

8. Déterminer le lien entre l'analyse d'intégrabilité de Yoshida, basée sur le calcul des exposants de Kovalevski, et le problème des configurations centrales dans le problème de n corps.
Nous prévoyons une collaboration avec J. Morales, S. Estrada et H. Yoshida.

9. Ecrire clairement ce qu'on sait sur la non-existence d'intégrales premières pour le problème des trois corps. La non-existence d'invariants intégraux serait intéressante aussi.

10. Poursuivre les études globales d'obstruction topologique à l'existence d'intégrales premières en classe de régularité donnée.

11. Approfondir la relation entre la non-intégrabilité complexe et réelle basée sur la procédure limite de Ziglin [21,22].

Un enjeu de ce projet sera aussi la diffusion de ces techniques à d'autres utilisateurs proches de la mécanique. Pour ce faire, nous envisageons, outre un groupe de travail régulier, un colloque à mi-parcours et une école d'été en fin de projet.

Bibliographie

[1] Audin, M., Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens, Séminaire Nicolas Bourbaki, 53ème année 2000-2001, nj884.
[2] Audin, M., La réduction symplectique appliquée à la non-intégrabilité du problème du satellite, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 12 (2003) 25-46.
[3] Boucher, D., Weil, J.-A., Application of J.-J. Morales and J.-P. Ramis' theorem to test the non complete integrability of the planar three-body problem, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics Volume 3, 2003.
[4] Boucher, D., Sur des équations différentielles linéares paramétrées, une application aux systèmes hamiltoniens, Phd Thesis, Université de Limoges, 2000.
[5] Tsygvintsev, A., The meromorphic non-integrability of the three-body problem. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik de Gruyter (Crelle's journal), N 537, 2001, 127-149.
[6] Tsygvintsev, A. , Non-existence of new meromorphic first integrals in the planar three-body problem. Celestial Mech. Dynam. Astronom. 86 (2003), no. 3, 237-247.

[7] Kovacic, J.J., An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations, J. Symbolic Comput., 2, 1986, 1, 3-43.
[8] Maciejewski, A.J., Przybylska, M., Darboux points and integrability of Hamiltonian systems with homogeneous polynomial potential, J. Math. Phys. 46 (6), 062901, 2005.
[9] Morales Ruiz, Juan J.J., Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems, Progress in Mathematics,179, Birkhauser Verlag, Basel, 1999.
[10] Morales-Ruiz, J. J., Kovalevskaya, Liapounov, Painlevé, Ziglin and the differential Galois theory, Regul. Chaotic Dyn., Regular & Chaotic Dynamics. International Scientific Journal, 5, 2000, 3, 251-272.
[11] Morales-Ruiz, J., Ramis, J.-P., A note on the non-integrability of some Hamiltonian systems with a homogeneous potential, Methods Appl. Anal., 8, 2001, 1, 113-120.
[12] Ulmer, F., Weil, J.-A., Note on Kovacic's algorithm, J. Symbolic Comput., 22, 1996, 2, 179-200.
[13] van der Put, M., Singer, M.F., Galois theory of linear differential equations, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 328, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
[14] Ziglin, S.L., Branching of Solutions and Non-Existence of First Integrals in Hamiltonian Mechanics. I,1982, Fun. Anal. Appl, 181-189, 16.
[15] Lochak, P., Marco, J.-P., Sauzin, D., On the splitting of invariant manifolds in multi-dimensional near-integrable Hamiltonian systems, Memoirs of the Amer. Math .Soc.,163, (2003).
[16] Marco, J.-P., Sauzin D., Stability and instability for Gevrey quasi-convex near-integrable Hamiltonian systems, Publ. Math. I.H.E.S., 96, (2003), 77
[17] Marco, J.P., Sauzin, D., Wandering domains and random walks in Gevrey near-integrable systems, Erg. Th. & Dynam. Syst., 24, (2004), 1619-1666.
[18] Boucher, D., Non complete integrability of a satellite in circular orbit, à paraître dans Portugaliæ Mathematica, (soumis en janvier 2005)
[19] Casale, G., Théories de Galois pour les feuilletages et les équations différentielles non linéaires, Phd Thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2004, France
[20] Malgrange, B., On nonlinear differential Galois theory, Chinese Ann. Math. Ser. B 23 (2002), no. 2, 219-226.
[21] Maciejewski A.J., Przybylska, M., Non-integrability of the problem of a rigid satellite in gravitational and magnetic fields, Celestial Mech. Dynam. Astronom. 87 (4), 317-351 (2003).
[22] Ziglin, S. L., On the absence of a real-analytic first integral in some problems of dynamics, Funct. Anal. Appl. 31 (1997), no. 1, 3-9.