Intégrabilité et théorie de Galois différentielle (Luminy 11-06)

(B. Malgrange) (Notes informelles)

## 1. Introduction

Contexte : $X$ variété algébrique $/\mathbb{C}$, lisse connexe. On se place au point générique = on restreint $X$ (sans toujours le dire) à un ouvert Zariski-dense. Donc on peut supposer $X$ affine et parallélisable, les faisceaux cohérents libres, etc.

On aura aussi éventuellement à remplacer $X$ par un revêtement fini étale (on le précisera quand on le fera).

Feuilletage : sous faisceau-cohérent $N \subset \Omega^1$ ($= \Omega^1_X$, 1-formes de $X$), avec $dN \subset N \wedge \Omega^1$

"Intégrabilité naïve" $\exists\, \omega_1, \dots, \omega_p$ base de $N$ vérifiant, et $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k = p$

vérifiant
$$d\omega_1 = \dots = d\omega_{p_1} = 0$$
$$d\omega_{p_1+1} = \dots = d\omega_{p_2} \equiv 0 \, (\omega_1, \dots, \omega_{p_1})$$
$$d\omega_{p_2+1} = \dots = d\omega_{p_3} \equiv 0 \, (\omega_1, \dots, \omega_{p_2})$$
et ainsi de suite.

[Explication intuitive : localement on intègre (analytiquement) : $\omega_i = df_i$ $1 \leq i \leq p_1$ ; puis on intègre $\omega_{p_1+1}, \dots, \omega_{p_2}$ sur $f_1 = c^{te}, \dots f_{p_1} = c^{te}$, etc...]

Exemple (classique) "Intégrabilité au sens de Liouville d'un système hamiltonien".

$X$ de dimension $2n$, muni d'une forme symplectique $\omega$

$h_1, \dots, h_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $dh_1, \dots, dh_n$ lin$^t$ indépendants, avec $\{h_i, h_j\} = 0$

($\{\,,\}$ = crochet de Poisson pour $\omega$)

$\xi$ le champ hamiltonien de $H = h_1$, i.e. $\xi \lrcorner \omega = dh_1$

$\xi + \frac{\partial}{\partial t}$ définit un feuilletage (de dimension 1) sur $X \times \mathbb{C}$

Proposition (classique) Le feuilletage est naïvement intégrable, avec $k = 2$

Démonstration classique : (quitte à restreindre $X$), on peut trouver $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Omega^1(X)$, avec $\omega = \Sigma\, dh_i \wedge \alpha_i$. Alors, si $dh_1^*, \dots, dh_n^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$ est la base duale on a $\xi = \alpha_1^*$ ; donc le feuilletage est donné par $dh_1, \dots, dh_n$ ; $\alpha_1 - dt$ ; $\alpha_2, \dots, \alpha_n$

Mais de $d\omega = 0$ on déduit $\Sigma\, dh_i \wedge d\alpha_i = 0 \Rightarrow d\alpha_i = \Sigma\, dh_j \wedge \beta_i^j$ (le signe – [illegible]

Insuffisance de cette notion Exemple: $y' = a(x)y + b(x)$, $a, b \in \mathbb{C}(x)$

Feuilletage dans $\mathbb{C}^2$ : $\omega_0 = dy - (a(x)y + b(x))\,dx$

on a $d\omega_0 = a\,dx \wedge dy = \omega_1 \wedge \omega_0$, avec $\omega_1 = a(x)\,dx$ (et $d\omega_1 = 0$)

Donc pas naïvement intégrable, mais est intégrable en tous les sens possibles du terme!

[Plus généralement; même chose pour feuilletage de codimension 1 avec défini par $\omega_0$, avec $d\omega_0 = \omega_1 \wedge \omega_0$, $d\omega_1 = 0$]

~~[illegible]~~ D'autre part ces équations "ressemblent" à celles de l'intégration naïve $\Rightarrow$ nécessité de généraliser cette notion.

2. Prolongement d'un feuilletage

Notion préliminaire $\mathcal{F}$ un feuilletage de $X$, défini par $N \subset \Omega^1$, et $E$ un fibré vectoriel sur $X$ (on peut supposer $E = X \times \mathbb{C}^m$)

"Connexion partielle à $\mathcal{F}$ sur $E$". On se donne "une dérivation sur $E$ dans la direction des feuilles" i.e. $\nabla : E \to E \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega^1/N$, avec les conditions usuelles : $\mathbb{C}$-linéarité, et

$\nabla(\varphi e) = \overline{d\varphi} \otimes e + \varphi \nabla e$ $\quad \overline{d\varphi}$ = classe de $d\varphi$ mod $N$, $\varphi \in \mathcal{O}_X$

Courbure, connexion plate : définition usuelle s'adapte trivialement.

Remarques Si on choisit une projection $X \to \mathbb{C}^p$ [$\mathbb{C}^p$ paramétré par $(t_1, \dots, t_p)$] transversale à la fibration, avec $p$ = dimension des feuilles, on est ramené à une notion classique en algèbre différentielle : $\mathbb{C}(X)$ est un corps différentiel, avec dérivations $\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_p}$, et $E$ est un vectoriel sur $X$ muni de dérivations $\frac{\partial}{\partial t_i}$ (qui commutent si $\nabla$ est plat)

Notations (essentiellement des notations usuelles)

si $\underline{e} = (e_1, \dots, e_m)$ est une base de $E$ : $\nabla \underline{e} = \underline{e}\,\Pi$ $\quad \Pi = (\pi_{ij})$ $\pi_{ij}$ sections de $\Omega^1/N$

Condition d'intégrabilité $d\Pi + \Pi \wedge \Pi = 0$ (mod $N$)

Généralité au principal $P = X \times GL(n, \mathbb{C})$ ; forme de connexion $\tilde{\Pi} = f^{-1}\,\underline{\Pi}\,f + f^{-1}df$, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, $f \in GL(n, \mathbb{C})$

Sur $P$, on a un feuilletage donné par les coefficients de $\tilde{\Pi}$, plus l'image inverse de $N$

~~Ses feuilles sont étales sur celles de F.~~ (~~pour avoir de bonnes équations, il faut prendre~~ $\omega f^{-1} = \tilde{\omega}$)

Ses feuilles sont étales sur celles de $F$.

Cas particulier (le seul qui servira ici) F un feuilletage défini par $N \subset \Omega^1$ ; le fibré conormal au feuilletage (i.e. N lui-même) est muni canoniquement d'un F feuilletage défini ainsi

Soit $\omega_1, \dots, \omega_q$ une base de N on écrit $d\omega_i = -\sum \omega_j \wedge \pi_i^j$

les $\pi_i^j$ sont bien définis mod $\omega_1, \dots, \omega_q$ (car $\sum \omega_i \wedge \psi_i = 0 \Rightarrow \psi_i = \sum g_i^j \omega_j$)

et définissent une F-connexion sur N.

Cette connexion est plate $dd\omega_i = 0 \Rightarrow -\sum d\omega_j \wedge \pi_i^j + \sum \omega_j \wedge d\pi_i^j = 0$

donc (en abrégé) $\underline{\omega} \wedge (\underline{\pi} \wedge \underline{\pi} + d\underline{\pi}) = 0$ et $d\underline{\pi} + \underline{\pi} \wedge \underline{\pi} \equiv 0 \ (\omega_1, \dots, \omega_q)$

~~Terminologie~~ On relève cette connexion à $X \times Gl(q, \mathbb{R})$ (plus intrinsèquement, au principal P(N)), sur lequel on a un feuilletage défini par les coefficients de $g^{-1}\underline{\pi} g + g^{-1} dg$ et $\underline{\omega} g$

Déf On appellera ce feuilletage "prolongement d'ordre 1 de F".

Autre interprétation : On regarde seulement le cas particulier d'une équation différentielle ordinaire (pour simplifier les notations ; le résultat est général)

$\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$ $Y = (y_1, \dots, y_p)$, $F = f_1, \dots, f_p$

Feuilletage sur espace $(x, Y)$ défini par $dy_i - f_i(x, Y)dx = \omega_i$

donc $d\omega_i = -\sum \omega_j \wedge \pi_i^j$ $\pi_i^j = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} dx$

la connexion qu'on obtient sur le fibré normal est le système d'équations linéaires

$$\frac{dZ_i}{dx} = \sum \frac{\partial f_i}{\partial y_j} Z_i$$

on obtient ce qu'on appelle "équations variationnelles" (ou linéarisées) du système différentiel ici au-dessus de la "solution générale" (d'habitude on regarde seulement la linéarisation au-dessus d'une solution particulière). La construction ci-dessus, début de la suite de Godbillon-Vey" est donc une manière ~~intrinsèque~~ indépendante du choix des coordonnées d'écrire les équations variationnelles !

Intuitivement : il revient au même d'intégrer un feuilletage (ou une équation différentielle) et son prolongement d'ordre un : en effet les intégrales du prolongement donnent les intégrales de l'équation initiale par projection. Dans l'autre sens "si on a une solution générale d'une équation différentielle, on en déduit immédiatement les solutions de son équation variationnelle".

Je ne sais ~~pas~~ pas formaliser l'argument précédent ; ce que je sais faire c'est montrer que les groupoïdes de Galois au sens de [Ma] sont "essentiellement les mêmes" (je n'ai pas envie de donner ici l'énoncé précis, ~~qui serait long à expliquer~~, encore ~~que sans grande difficulté~~).

Par ailleurs, le prolongement peut être naïvement intégrable, sans que l'équation (le feuilletage initial) le soit.

Ex : ~~[illegible]~~, C'est le cas de l'équation ~~[illegible]~~ linéaire affine (exemple 2, §1).

Le feuilletage est défini par $\omega = dy - (ay+b)dx$

On a $d\omega = -\omega \wedge \pi$, $d\pi = 0$ avec $\pi = +a\,dx$ (je change les notations pour retrouver celles du § 2). Le prolongement est donné par ~~[illegible]~~

$\bar\omega = t^{-1}\omega$, $\bar\pi = \pi + t^{-1}dt$ ; on a encore $d\bar\pi = 0$, $d\bar\omega = \bar\omega \wedge \bar\pi$, et c'est naïvement intégrable.

~~[illegible]~~ D'une façon générale : définissons le prolongement d'ordre $k$ d'un feuilletage par récurrence, comme le 1-prolongement du $(k-1)$-prolongement. On dira alors qu'un feuilletage est intégrable si, après éventuellement remplacement (d'un ouvert Zariski dense) de $X$ par un revêtement étale fini, le prolongement d'un certain ordre $k$ est naïvement intégrable.

~~On va essayer d'expliquer~~ ~~On va essayer d'expliquer comment cette propriété se relie au groupoïde de Galois différentiel du feuilletage (longueur, [illegible])~~

On peut démontrer que cette propriété équivaut à ce suivant : la cogèbre ~~[illegible]~~ de Lie du groupoïde de Galois du feuilletage est résoluble. Je vais donner quelques indications (incomplètes) sur cette question.

## 3. Prolongement et théorie de Galois différentielle

A) On reprend d'abord la situation générale du début du § 2 : $X$ est muni d'un feuilletage $F$ défini par $N \subset \Omega^1_X$ ; $E = X \times \mathbb{C}^m$, fibré vectoriel muni d'une $F$-connexion $\nabla$. Ceci définit une connexion (et un feuilletage) sur le principal $P = X \times Gl(m, \mathbb{C})$.

Ce feuilletage est trop grand : il ~~contient en général~~ admet en général des intégrales premières inutiles (même si le feuilletage $F$ est trivial, i.e. $N = 0$). Pour les [illegible], on cherche à réduire le groupe structural de la connexion.

~~Ce qui suit est~~ une présentation. Ceci est en fait implicitement l'objet de la théorie de Galois différentielle (ou théorie de Picard – Vessiot). Voici rapidement une présentation adaptée au sujet de cet exposé.

On introduit le groupoïde $\mathrm{Iso}\, E$ : objets points $a \in X$ ; flèches : isomorphismes des fibres $E(a) \xrightarrow{\sim} E(b)$ ; il est muni d'une structure algébrique de "schéma en groupoïdes" évidente ; son algèbre de Lie est l'ensemble des paires (vecteur de $TX$ en $a$, application linéaire $E(a) \to E(a)$). On définit alors le plus petit sous-groupoïde ~~de Iso E~~ (algébrique) $\Gamma$ de $\mathrm{Iso}\, E$, dont l'algèbre de Lie contient la connexion donnée (voir des définitions analogues dans [Mo]), et on l'appelle "groupoïde de Galois" de la connexion.

Pour le décrire, il faut distinguer deux cas

i) Cas transitif, i.e. le feuilletage $F$ n'a pas d'intégrale première (rationnelle ; i.e. régulière si l'on restreint $X$). On choisit un point base $a \in X$ ; les flèches de $\Gamma$ de source et but $a$ forment un sous groupe algébrique $G$ de $Gl(E(a)) = Gl(m, \mathbb{C})$, qu'on appelle "groupe de Galois" de $\nabla$ (avec les ambiguïtés évidentes). Les flèches de $\Gamma$ de source $a$ et but quelconque forment un fibré $G$-principal $Q$ sur $X$, qui est muni d'une $F$-connexion ; on récupère la situation initiale par extension du groupe de $G$ à $Gl(m, \mathbb{C})$

(Construction équivalente : ~~[illegible]~~ considérer $\mathbb{C}(X)$ comme un corps différentiel comme expliqué plus haut, et prendre l'extension de Picard-Vessiot de $\nabla$, qui est essentiellement la même chose que le principal ~~[illegible]~~ $Q$.

La manière la plus simple de le voir est probablement de comparer les deux constructions à la construction "tannakienne" à la Deligne-Milne [D-M].

Si $Q$ est (génériquement) trivial, ceci donne une réduction de la matrice de la connexion à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$. Dans le cas général, on pourra faire une telle réduction après remplacement de $X$ par un revêtement fini (bien sûr, si l'on veut revenir à $X$, il faudra ajouter des conditions de descente).

ii) Cas intransitif. On peut supposer que les intégrales premières sont données par un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$, $Y$ lisse, $f$ surjectif et de rang maximum.

Juste quelques indications : on pourra faire essentiellement la même construction qu'en i) si l'on dispose d'une section ~~[illegible]~~ de $f$, $\sigma : Y \to X$. En général, ceci se produira après remplacement de $Y$ par un revêtement $\tilde{Y}$, et de $X$ par $X \times_Y \tilde{Y}$ (donc, outre les conditions de descente indiquées plus haut, ~~[illegible]~~ ceci en ajoutera d'autres).

[Du point de vue "Picard-Vessiot" ceci revient à faire la théorie de Galois différentielle sur un corps différentiel dont le corps des constantes n'est pas algébriquement ~~[illegible]~~ clos, question examinée dans la thèse de Dyckerhoff. Du point de vue connexion, ceci revient à neutraliser une catégorie tannakienne par une extension finie. Pour les conditions de descente que cela entraîne, voir [D-M]).

B) Prenons en particulier le cas qui nous intéresse ici où $E = N$, fibré normal au feuilletage, muni de la $F$-connexion considérée ci-dessus. Dans le cas transitif, quitte à ~~faire un~~ remplacer $X$ par un revêtement (pour trivialiser le fibré $Q$), on trouve des équations $d\omega_i = \sum \omega_j \wedge \pi_i^j$, avec $(\pi_i^j)$ une forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie du groupe de Galois $G$ de la connexion ; il faut alors considérer leur extension au principal $X \times G$, ~~[illegible]~~ par des formules analogues à celles trouvées plus haut $\tilde{\omega} = \omega g$, $\tilde{\pi} = g^{-1}\pi g + g^{-1}dg$, $g \in G$ et considérer le feuilletage ainsi défini qu'on appellera "prolongement réduit d'ordre 1".

Juste un mot du cas intransitif (on remplace aussi X par un revêtement convenable)

Si $dy_1, \dots, dy_n$ est (génériquement) une base de $\Omega^1_Y$, et si l'on pose $y_i \circ f = f_i$, on prend une base de N formée des ~~...~~ $df_i$ et de $\omega_1, \dots, \omega_s$ ($n+s$ = la codimension de F)

Le groupe G serait un groupe au-dessus de Y (= un fibré en groupes sur Y), de la forme

$\begin{pmatrix} I & H \\ 0 & G' \end{pmatrix}$, d'algèbre de Lie $\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{h} \\ 0 & \mathfrak{g}' \end{pmatrix}$ ; avec un choix convenable des $\omega_k$.

Les équations seront

$df_i = 0$

$d\omega_i = -\sum df_j \wedge \psi_i^j - \sum \omega_k \wedge \pi_j^k$

avec $(\pi_j^k)$ à valeurs dans $\mathfrak{g}'$, et $\psi_i^j$ à valeurs dans $\mathfrak{h}$.

Le relèvement au principal s'écrit encore comme ci-dessus. On l'appelle encore "prolongement réduit d'ordre un".

4. Relation avec Galois différentiel non-linéaire

On continue dans la situation $(X, F, N \subset \Omega^1_X)$ précédente. Soit $J_k^*(X)$ la variété des jets d'ordre k inversibles de X dans X. Par définition (cf [Ma]), le groupoïde de Galois de X est défini par une collection $Y_k$ de sous-variétés fermées de X possédant la propriété suivante : $Y_k$ est, sur un ouvert Zariski-dense de X, le plus petit sous-groupoïde de $J_k^*(X)$ dont l'algèbre de Lie contient les jets d'ordre k de champs de vecteurs tangents à X (version exactement la ~~...~~ version de [Ma] dans le cas algébrique, mais c'est équivalent)

Prenons en particulier $k = 1$ ; alors $J_1^*(X)$ s'identifie à l'espace des isomorphismes $T_a \xrightarrow{\sim} T_b$, $a, b$ ~~..~~ points de X à valeurs dans $\mathbb{C}$ (on écrit $a, b \in X$). Les éléments de $Y_1$ sont donc les isomorphismes ~~..~~ $T_a \xrightarrow{\sim} T_b$ qui respectent la fibration ; ils sont ~~donc~~ déterminés par leur partie transversale, i.e. $N(a)^* \xrightarrow{\sim} N(b)^*$ ($N(a)$ la fibre de N en a). Alors la propriété demandée identifie $Y_1$ au groupoïde de Galois de N muni de sa F-connexion telle qu'elle a été considérée au paragraphe précédent. La description du groupoïde donnée au §3 décrit donc $Y_1$.

On repasse du ~~principal~~ prolongement réduit Q à $Y_1$ de la manière suivante

(je l'écris ~~seulement~~ dans le cas transitif ; dans le cas intransitif, les formules sont seulement un peu plus longues) : si $a$ est un point de $X$ et $q$ un point de $Q$ de projection $a$, on a un isomorphisme "germes $\varphi$ de source $a$ d'automorphismes analytiques $X \to X$ avec $j^1\varphi$ section de $Y_1$" $\Longleftrightarrow$ "germes $\psi$ de source $q$ d'automorphismes analytiques $Q \to Q$, avec $\psi^* \bar{\omega} = \bar{\omega}$", $\bar{\omega} = \underline{\omega}$ | le relèvement de $\underline{\omega}$ à $Q$ (cf notations du § 2).
[En fait, $\psi$ est projetable sur $X$, de projection $\varphi$, et le relèvement $\varphi \to \psi$ est unique] Cette proposition est le départ de la "théorie du repère mobile" d'E. Cartan ; cf [S–S]

<u>Passage aux ordres supérieurs</u>. A priori, il y a deux manières de faire : l'une consiste à définir directement $Y_k \subset J_k^*(X)$ de manière analogue à la précédente ; l'autre consiste à itérer : si $Q$ est le ~~[illegible]~~ prolongement réduit d'ordre un, on prend le prolongement réduit d'ordre un ($Q_2$) du feuilletage de $Q$, et ainsi de suite.

On peut montrer que les ~~deux~~ procédés sont équivalents. ~~[illegible]~~ Je vais décrire rapidement les données auxquelles on arrive (dans le cas transitif) et qui représentent l'analogue non-linéaire de l'extension de Picard-Vessiot.

i) Un système projectif $X \leftarrow Q = Q_1 \leftarrow Q_2 \leftarrow \cdots Q_k \leftarrow \cdots$ ; ~~$Y_k$~~

ii) Un système projectif de groupes $G_1 \leftarrow G_2 \leftarrow \cdots G_k \leftarrow$ ; $G_k$ est un sous-groupe algébrique du groupe $Gl(n, \mathbb{C})^{(k)}$ : jets d'ordre $k$ inversibles de $(\mathbb{C}^n, 0)$ dans lui-même.

De plus $Q_k$ est un fibré sur $X$ de groupe $G_k$.

iii) Une cogèbre de Lie filtrée $0 \subset M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset \cdots$, $\cup M_k = M$ ;

~~elle est munie d'une dérivation [illegible] (avec les notations des § précédents, $M_0$ est l'espace engendré sur $\mathbb{C}$ par les $\omega_i$, et $M_1$ celui engendré par les $\omega_i$ et les $\pi_i^j$)~~

Les $M_i$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$ ; $M$ est muni d'une dérivation $\mathbb{C}$-linéaire $M \to \Lambda^2 M$ vérifiant ($d^2 = 0$ et) $dM_k \subset M_k \wedge M_{k+1}$ [on a même $dM_k \subset M_0 \wedge M_{k+1} + M_1 \wedge M_k + \cdots$]

(iv) $M$ est engendré par $M_0$ au sens suivant : $M_1$ est le plus petit sous-espace de $M$ tel qu'on ait $dM_0 \subset M_0 \wedge M_1$ ~~[en d'autres termes, si $M_0$ est engendré par les $\omega_i$, si $d\omega_i = \sum \omega_j \wedge \pi_i^j$, les $\pi_i^j$ sont bien déterminés modulo les $\omega_i$ ; et donc $M_1$]~~ [Ceci au sens : si $M_0$ est engendré par les $\omega_i$, et si l'on a $d\omega_i = \sum \omega_j \wedge \pi_i^j$, les $\pi_i^j$ sont bien déterminés modulo les $\omega_i$, car $\sum \omega_j \wedge \alpha_j = 0 \Rightarrow \alpha_j \equiv 0 (\omega_i)$ ; alors, on prend $M_1$ engendré par les $\omega_i$ et $\pi_i^j$]
De même, $M_2$, $M_3$ etc. sont définis par la propriété de minimalité analogue.

v) Une action de $G$ sur $M$ préservant la filtration ; de façon précise, $G_k$ agit (algébriquement) sur $M_{k-1}$ ; de plus ~~[illegible]~~ la cogèbre de Lie (= formes invariantes à gauche) de $G$ s'identifie à $M/M_0$ ; et plus précisément la cogèbre de Lie de $G_k$ s'identifie à $M_k/M_0$, qui est bien une cogèbre de Lie. Bien entendu, l'action adjointe de $G_k$ sur $M/M_0$ est celle qui se déduit de son action sur $M$.

vi) Une "connexion de Cartan" de la paire $(M, G)$ dans $\varprojlim \mathfrak{g}_k$,

i.e. un système projectif d'applications $M_k \to \Omega^1(\mathfrak{g}_k)$, commutant avec l'action de $G$, et ~~compatible avec l'action de~~ dont la restriction $M_{k-1} \to \Omega^1(\mathfrak{g}_{k-1})$ est compatible avec les dérivations.

(p.ex., sur $P_1$, avec les notations du début de 3. B), on ~~[illegible]~~ prendrait $M_0$ = l'espace engendré par les $\tilde{\omega}_i$, et $M_1$ par celui engendré par les $\tilde{\omega}_i$, $\tilde{\pi}^i_j$ ).

En général ces données sont exprimées en termes duaux d'algèbre de Lie filtrée au lieu de cogèbre (cf [S-S]). La formulation donnée ici est celle qui s'étend au cas intransitif, où il est nécessaire de parler en termes de cogèbres. Les principales modifications à faire dans le cas intransitif sont les suivantes : $G = \varprojlim G_k$ est un groupe sur $Y$ (et non plus sur $\mathbb{C}$). D'autre part, la cogèbre $M$ est ce que j'appelle "une cogèbre au-dessus de $Y$", c'est-à-dire que les $M_k$ sont des $\mathcal{O}_Y$-modules, que $\Omega^1_Y \subset M_0$, et enfin que la différentielle vérifie $d(fm) = df \wedge m + f\,dm$, $f \in \mathcal{O}_Y$, $m \in M$. ~~[illegible]~~ (Bien entendu, on conserve les propriétés de filtration, et $d^2 = 0$)

On passe de ces données au groupoïde de Galois $Y = \{Y_k\}$ de manière analogue à ce qu'on a fait pour $k = 1$.

5. Re-intégrabilité.

Pour simplifier l'énoncé, je me limite au cas transitif (mais le cas général n'est pas beaucoup plus compliqué). Je garde les notations précédentes ; une cogèbre transitive $M_k$ (p.ex. $M_0$) est dite "normalement intégrable" si elle satisfait les propriétés indiquées dans l'introduction. On dira d'autre part que $M$ est résoluble si $M$ est réunion croissante de sous-espaces vectoriels $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_k \subset \dots$ (de dimension et en nombre [illegible] finis), tels qu'on ait la propriété suivante, analogue à l'intégrabilité naïve :

$dN_0 = 0$ ; $dN_1 \subset N_0 \wedge N$ ; $dN_2 \subset N_1 \wedge N$ etc –

Le résultat général est la proposition (facile) suivante.

<u>Proposition</u> 1) Si $M_k$ est naïvement intégrable pour un certain $k$, alors $M$ est résoluble (et la suite des $N$ s'arrête au premier $N_\ell$ qui contient $M_k$).

2) Réciproquement, si $M$ est résoluble, alors $M_k$ est naïvement intégrable pour $k$ assez grand.

Cette proposition a-t-elle un analogue en dim finie ? –

## Bibliographie


[D-M] P. Deligne – J. Milne, Tannakian categories, Springer L. Notes 900 p. 101–228

[Ma] B. Malgrange, Le groupoïde de Galois d'un feuilletage, Monographie Ens. Math 38 (2001) 465–501

[S-S] I. Singer – S. Sternberg The infinite groups of Lie and Cartan, Jal Analyse Math. Jerusalem (1965) 1–114


N.B. Pour la commodité du lecteur, j'ai ajouté ci-joint une bibliographie de base sur les pseudogroupes de Lie.

—

Pseudogroupes de Lie : 99 références

---

Références générales

Outre les articles d'E. Cartan (Ann. ENS ~ 1901–1910)
Singer–Sternberg, Jal Analyse Math. (1965) 1–114 (référence de base)
Guillemin–Sternberg Memoirs AMS 64 (1966)
" Bull. AMS 70-1 (1964) 16–47

D.S. Kim Ann Math 83 (1966) 339–357

[ Dynkin , Am. Math. Soc. Transl. 2-6 (1957) 245–378 ]
Guillemin Jordan-Hölder decomposition, J. diff. Geom. 2 (1968) 313–345

Classification pseudogr. primitifs

Guillemin–Quillen–Sternberg Proc. N. Ac. Sc. 55 (1966) 687–690
" Comm. P. Appl. Math. 23 (1970) 39–77
T. Ochiai Trans. AMS 124 (1966) 313–322 (primitifs de dimension finie)

Cas intransitif

T. Morimoto J. Math Soc. Japan 29-1 (1977) 35–65
K. Kiso Japanese Jal of Math 5 (1979) 105–155

P. Cassidy Am. J. Math 94 (1972) 891–954
Jal of Algebra 121-1 (1989) 169–238
(Les deux derniers articles, dans le cadre des "differential algebraic groups" de Kolchin)

Problème d'équivalence

R.B. Gardner in Diff. geom. control theory, Progress in Math
27 (1983) Birkhäuser, 117–180

S. Neut Thèse Lille 2003 (implantation informatique)