EXAMEN TERMINAL DU 18/12/2007
MASTER 2,
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE LOCALE

Les notes de cours sont autorisées.

Exercice 1. À quelles conditions les germes de $\mathbb{C}\{x,y\}$ suivants ont-ils une singularité isolée en l'origine? Sont-ils simples? Calculer leur nombre de Milnor.

(1) $f(x,y) = x^4 + y^4 + ax^2y^2$.
(2) $g(x,y) = x^3 + y^6 + bx^2y^2$.

Exercice 2. Soit $f_a \in \mathbb{C}\{x,y\}$ le germe défini par $f_a(x,y) = x^2y^2 + a(x^5 + y^5)$ avec $a \in \mathbb{C}^*$.

(1) Montrer que f_a a une singularité isolée en l'origine. Le germe f_a est-il simple?
(2) Vérifier que f_a est déterminée à l'ordre 5.
(3) Calculer les nombres de Milnor et de Tjurina de f_a.
(4) Déterminer les valeurs de $a, b \in \mathbb{C}$ pour lesquelles les germes f_a et f_b sont équivalents.

Exercice 3.

(1) Soit $f \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ un germe de corang s. Montrer que $\mu(f) \geq 2^s$.
(2) Soit $f \in m^4 \subset \mathbb{C}\{x,y\}$. Montrer que $\mu(f) \geq 9$.
(3) Soit $f \in (x,y^2)^3 \subset \mathbb{C}\{x,y\}$. Montrer que $\mu(f) \geq 10$.
(4) Démontrer que les germes de nombre de Milnor inférieur strictement à 8 sont simples.

Exercice 4. Soit $F_t \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n, t\}$ avec F_0 à singularité isolée. On suppose que pour $t_1, t_2 \neq 0$ suffisamment petits les germes F_{t_1} et F_{t_2} sont équivalents, mais pas équivalents à F_0. Montrer que le nombre de Milnor de F_t, pour t petit, est strictement inférieur à celui de F_0.

Exercice 5.

(1) Soit $I \subset \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ un idéal. Montrer que le germe d'espaces analytiques en $0 \in \mathbb{C}^n$ défini par I est le singleton $\{0\}$ si et seulement si la dimension sur $\mathbb{C}$ de l'espace vectoriel quotient de $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ par I est finie.
(2) Soit $f : (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ un germe d'applications analytiques entre germes d'espaces analytiques. Montrer que f est fini si et seulement si $\mathcal{O}_{X,x}$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}_{Y,y}$.

Exercice 6. Soit $f \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ déterminée à l'ordre $k \in \mathbb{N}$. Soit π la projection de l'espace des jets d'ordre $k+1$ sur l'espace des jets d'ordre k.

(1) Montrer que $\pi^{-1}(j_k f)$ est inclus dans l'orbite de $j_{k+1} f$ (sous l'action de G_{k+1}).
(2) En déduire que m^{k+1}/m^{k+2} est inclus dans $(mJ(f) + m^{k+2})/m^{k+2}$.
(3) En déduire l'inclusion $m^{k+1} \subset mJ(f)$.
(4) Montrer que si f admet une singularité en l'origine, elle est isolée.