RAPPEL : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

1. Changement de bases

1.1. Matrice de passage d'une base à une autre. Soit V un espace vectoriel de dimension finie n.

Définition. Soit $\mathcal{B}$ une base de V. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de V.

On appelle ***matrice de passage*** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, et on note $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice carrée de taille $n \times n$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base $\mathcal{B}'$dans la base $\mathcal{B}$.

On interprète une matrice de passage comme une matrice associée à l'application identité de V :

Proposition. La matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice associée à l'identité $\mathrm{id}_V : (V, \mathcal{B}') \to (V, \mathcal{B})$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)}$$

Exemple. Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$, on considère

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et la base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$.

Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$?

Il faut exprimer ϵ_1 et ϵ_2 en fonction de (e_1, e_2). On calcule que :

$$\epsilon_1 = -e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \epsilon_2 = e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est donc :

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1.2. **Formule de changement de bases.** Soit $f : V \to V$ une application linéaire et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de V.

Soit

— $P = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

— $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}$.

— $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$.

Proposition.

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Le but de la réduction est d'obtenir, par changement de bases, une matrice de f la plus simple possible !

"Plus simple" peut vouloir dire :

— trouver des invariants de f (valeurs propres, polynôme caractéristique, ...)

— faire des calculs (puissance de matrice, exponentielle, ...)

1.3. **Matrices semblables.** Les matrices considérées dans cette page sont des matrices carrées, éléments de $M_n(\mathbb{K})$.

Définition. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice B est ***semblable*** à la matrice A s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

La relation « être semblable » est une relation d'équivalence dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$:

Proposition.
- La relation est ***réflexive*** : une matrice A est semblable à elle-même.
- La relation est ***symétrique*** : si A est semblable à B, alors B est semblable à A.
- La relation est ***transitive*** : si A est semblable à B, et B est semblable à C, alors A est semblable à C.

Corollaire. Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme, mais exprimé dans des bases différentes.

2. Spectre

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition. Soit $f \in \mathcal{L}(V)$. On appelle

- ***valeur propre*** de f un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que l'endomorphisme $\lambda Id - f$ n'est pas injectif,
- ***vecteur propre*** de f associé à la valeur propre λ tout vecteur v ***non nul*** de $\mathbb{K}^n$ tel que $f(v) = \lambda v$,
- ***espace propre*** $E_\lambda(f)$ de f associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ,
- ***spectre*** de f l'ensemble $\mathrm{Sp}(f)$ des valeurs propres de f.

Remarque. On appelle valeur propre d'une matrice A toute valeur propre de l'endomorphisme associé à A dans la base canonique, etc ...

Lemme. Si $f \in \mathcal{L}(V)$ est nilpotent, alors $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

Définition. Soit $f \in \mathcal{L}(V)$. On appelle ***polynôme caractéristique*** de f le polynôme $\chi_f(X) = \det(X \operatorname{id}_V - f) \in \mathbb{K}[X]$.

Proposition. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique χ_f.

Corollaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme f admet au moins une valeur propre.

Mais pas sur $\mathbb{R}$, par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $m_\lambda(f)$ la ***multiplicité*** de λ dans χ_f.

Lemme. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\boxed{\dim E_\lambda(f) \leqslant m_\lambda(f)}$$

3. Diagonalisabilité

Lemme. Soit $f \in \mathcal{L}(V)$. Les espaces propres de f sont en somme directe.

Définition. On dit que f est ***diagonalisable*** si la somme (directe) de ses espaces propres est égale à V.

Théorème. Soit $f \in \mathcal{L}(V)$. Sont équivalents :

(1) f est diagonalisable

(2) χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on a $\dim E_\lambda(f) = m_\lambda(f)$.

Exemple. Si f admet n valeurs propres distinctes.

4. Polynôme d'endomorphisme

Si $f \in \mathcal{L}(V)$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$P(f) = a_0 \operatorname{id}_V + a_1 f + \cdots + a_d f^d \in \mathcal{L}(V)$$

où $f^d = f \circ \cdots \circ f$ composée d-fois.

Remarque. On fait de même pour les matrices. Par exemple pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X(X-1)$, il vient

$$P(A) = A(A - I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Lemme. Si $P(f) = 0$ dans $\mathcal{L}(V)$, alors $P(\lambda) = 0$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(F)$.

Lemme (de ***décomposition des noyaux***)**.** Soient $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes deux à deux premiers entre eux, et $P = P_1 \cdots P_k$. Alors

$$\ker P(f) = \ker P_1(f) \oplus \cdots \ker P_k(f).$$

Théorème (de ***Cayley-Hamilton***)**.** On a $\chi_f(f) = 0$.

Corollaire. Si la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors A^{-1} est un polynôme en A.

Exemple. Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$ d'où

$$0 = (A - I)(A - 2I)^2 = A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = A(A^2 - 5A + 8I) - 4I$$

et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I).$$

Définition. Un sous-espace vectoriel U de V est dit ***stable*** par $f \in \mathcal{L}(V)$ si $f(U) \subset U$.

La restriction de f à U donne alors une application linéaire $f_{|U} \in \mathcal{L}(U)$.

Exemple. Supposons $V = U \oplus W$ et soit p la projection sur U parallèlement à W. Alors U est stable par p et l'application $p_{|U} = \mathrm{id}_U$.

Lemme. Si $U \subset V$ est stable par $f \in \mathcal{L}(V)$, alors $\chi_{f_{|U}}$ divise χ_f.

En particulier, si χ_f n'a que des racines simples, c'est le cas aussi de $\chi_{f_{|U}}$.

Théorème. Sont équivalents :

(1) f est diagonalisable,

(2) Il existe un polynôme scindé à racines simples $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$.

Mais ce n'est pas forcément le polynôme caractéristique !

Corollaire. Soit $U \subset V$ stable par $f \in \mathcal{L}(V)$. Si f est diagonalisable, alors $f_{|U}$ est diagonalisable.

Définition. Le polynôme unitaire μ_f engendrant l'idéal des polynômes annulateurs de f est appelé ***polynôme minimal*** de f.

Il divise donc tout polynôme annulateur de f, donc en particulier χ_f d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème. Sont équivalents :

(1) f est diagonalisable,

(2) μ_f est scindé à racines simples.

Remarque. Les racines de μ_f sont exactement les valeurs propres de f.

Exemple. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$$

et

$$\mu_A = \chi_A.$$

Donc A n'est pas diagonalisable.

5. Triangularisabilité

Définition. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(V)$ est ***triangularisable*** s'il existe une base de V dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Théorème. Sont équivalents :

(1) f est triangularisable,

(2) χ_f est scindé dans $\mathbb{K}$.

C'est donc toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$!

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas triangularisable sur $\mathbb{R}$.

Corollaire. Soit $U \subset V$ stable par $f \in \mathcal{L}(V)$. Si f est triangularisable, alors $f_{|U}$ est triangularisable.

La forme la plus poussée de triangularisation est la ***forme de Jordan***.