PROPOSITION DE SUJETS DE SÉMINAIRES DE MASTER 2

1. Sujet 1: Singularités des courbes

Toute variété algébrique, définie sur un corps de caractéristique nulle, admet une résolution de ses singularités, c'est-à-dire qu'on peut trouver une variété régulière "proche" de la variété de départ. Dans le cas des courbes, il suffit pour cela de réaliser des éclatements des points singuliers qui permettent, grosso modo, de séparer les croisements. Un invariant permet alors de vérifier qu'à chaque étape, on a effectivement bien fait diminuer la singularité.

Référence: Brieskorn, Knörrer: Plane Algebraic Curves, Birkhäuser

2. Sujet 2: Théorème de Puiseux

Le théorème de Puiseux décrit la clôture algébrique du corps des fractions des séries formelles sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Du point de vue géométrique il donne une paramétrisation des branches d'une courbe plane. On propose une démonstration constructive qui repose sur l'utilisation du polygone de Newton.

Référence: Walker, Algebraic curves, Springer

3. Sujet 3: Normalisation des variétés

La normalisation des variétés peut être vue comme une première étape en vue de la résolution des singularités d'une variété. Elle donne en particulier un morphisme fini vers la variété de départ, et ses singularités sont concentrées dans une sous-variété de codimension au moins deux. En conséquence, la normalisation d'une courbe est régulière!
On propose d'étudier la normalisation dans le cadre des germes d'espaces analytiques complexes.

Référence: de Jong, Pfister: Local Analytic Geometry, Advanced Lectures in Mathematics

4. Sujet 4: Principe de conservation des nombres

Le but est d'étudier le comportement d'invariants au cours de la déformation d'une singularité. Par exemple en perturbant le polynôme x^2 de degré *deux* par un paramètre t^2, on obtient *deux* racines simples t et $-t$. Le principe de base est que, au cours de la transformation, on a peut-être simplifier la singularité en un point, mais on conserve toutes les informations sur un voisinage de ce point. On aborde cette question à travers la notion de faisceau cohérent.

Référence: de Jong, Pfister: Local Analytic Geometry, Advanced Lectures in Mathematics

5. Sujet 5: Loi de groupe sur une courbe elliptique

Une courbe elliptique plane est une courbe définie par une équation du type $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$. L'ensemble de ses points est équipé d'une loi de groupe définie de la façon suivante. Toute droite passant par deux de ses points recoupe la courbe en un troisième point, qui se trouve être l'opposé de la somme des dits points. On propose d'étudier quelques propriétés de cette loi de groupe.

Référence: Silverman: The Arithmetic of elliptic curves, Graduate texts in mathematics