CONTRÔLE CONTINU DU 6/11/2007
MASTER 2,
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE LOCALE

Les notes de cours sont autorisées.

Exercice 1. Soit k un corps et A une algèbre locale sur k d'idéal maximal m.

(1) Montrer que si $\dim_k A = n$, alors $m^n = 0$.
(2) Si l'idéal $I \subset A$ satisfait à $\dim_k \frac{A}{I} = n$, alors $m^n \subset I$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}[y]$ telle que

$$f = \prod_{i=1}^{s} (y - \lambda_i)^{d_i} \mod (x_1, \ldots, x_n)$$

avec $d_i \in \mathbb{N}^*$ et les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}[y]$ tels que $f = \prod_{i=1}^{s} f_i$ et

$$f_i = (y - \lambda_i)^{d_i} \mod (x_1, \ldots, x_n).$$

Exercice 3. Soient $f, g \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

(1) Montrer que, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, il existe $u, v \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ inversibles et $P, Q \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}[x_n]$ des polynômes distingués par rapport à x_n tels que $f = uP$ et $g = vQ$.
On suppose dans la suite que f et g sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$.
(2) Montrer que P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}[x_n]$.
(3) En déduire l'existence de $a, b \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ tels que $af + bg \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \setminus \{0\}$.
(4) **Question bonus:** Démontrer le théorème du Nullstellensatz pour les idéaux principaux (g) avec $g \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ irréductible.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}[y]$ un polynôme distingué d'ordre r par rapport à y. Notons

$$P(x, y) = y^r + a_1(x)y^{r-1} + \cdots + a_r(x).$$

(1) Soit U un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^n$ sur lequel $a_1, \ldots, a_r$ convergent. Montrer que le germe d'application holomorphe

$$q : \big(\{P = 0\} \cap (U \times \mathbb{C}), (0, 0)\big) \longrightarrow (U, 0)$$

défini par $q(x, y) = x$ est fini et surjectif.
(2) Montrer que pour tout voisinage ouvert V de $0 \in \mathbb{C}$, il existe un voisinage ouvert W de $0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $a_1, \ldots, a_r$ convergent sur W et tel que pour tout $b \in W$ les zéros de $P(b, y)$ sont dans V.

Exercice 5. Soient $I \subset \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $J \subset \mathbb{C}\{y_1, \ldots, y_m\}$ des idéaux et

$$\phi : \frac{\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}}{I} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}\{y_1, \ldots, y_m\}}{J}$$

un morphisme d'algèbres sur $\mathbb{C}$. On suppose que $f_1, \ldots, f_r \in \frac{\mathbb{C}\{y_1, \ldots, y_m\}}{J}$ engendrent $\frac{\mathbb{C}\{y_1, \ldots, y_m\}}{(J, \phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))}$. Montrer que $f_1, \ldots, f_r$ engendrent alors $\frac{\mathbb{C}\{y_1, \ldots, y_m\}}{J}$ comme module (via ϕ) sur $\frac{\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}}{I}$.