LOI DE GROUPE SUR LA COMPOSANTE NEUTRE DE LA JACOBIENNE D'UNE COURBE RÉELLE DE GENRE 2 AYANT BEAUCOUP DE COMPOSANTES RÉELLES

G. FICHOU

RÉSUMÉ. Soit C une courbe algébrique réelle de genre 2 ayant au moins deux composantes connexes réelles B_1 et B_2. En s'appuyant sur un résultat de J. Huisman qui donne une description géométrique de la structure de groupe sur la composante neutre $Pic^o(C)^o$ des points réels de la jacobienne de C, on donne un plongement de C dans un éclatement en un point du plan projectif. Ce plongement induit une description géométrique de cette loi de groupe dans le plan projectif via un isomorphisme entre $Pic^o(C)^o$ et le produit $B_1 \times B_2$ des branches réelles de C vues dans le plan. Cette description fait intervenir des intersections de C avec des coniques de manière analogue à la description géométrique de la structure de groupe sur la branche réelle neutre d'une courbe elliptique réelle qui est donnée par des intersections de la courbe elliptique avec des droites.

ABSTRACT. Let C be a real algebraic curve of genus 2 with at least two real components B_1 and B_2. We give an embedding of C into the projective plane, blown up in a point. It allows us to describe geometrically the neutral real component $Pic^o(C)^o$ of the Jacobian of C thanks to an isomorphism with the product $B_1 \times B_2$. This induices an explicit geometric description of $Pic^o(C)^o$ in the projective plane, where the group law on B is given by intersection with conics.

INTRODUCTION

Soit C une courbe réelle, à savoir un schéma sur $\mathbb{R}$ géométriquement irréductible, lisse et propre de dimension 1. Soit g son genre. D'après l'inégalité de Harnack C a au plus $g+1$ composantes connexes réelles [4]. On dit que C a beaucoup de composantes connexes réelles si elle en a au moins g.

La composante neutre $Pic^o(C)^o$ des points réels de la jacobienne constitue un groupe de Lie réel isomorphe à $(\mathbb{S}^1)^g$ (cf [2], [3]). Justement, pour une courbe algébrique réelle C de genre g ayant beaucoup de composantes connexes réelles, J. Huisman [6] établit un isomorphisme explicite entre $Pic^o(C)^o$ et le produit $B = B_1 \times ... \times B_g$ de g branches deux à deux distinctes de $C(\mathbb{R})$, après plongement de C dans $\mathbb{P}^{2g}$. La loi de groupe sur B est alors donnée par des intersections avec des hyperplans de $\mathbb{P}^{2g}$, généralisant la loi de groupe sur la branche réelle neutre d'une courbe elliptique réelle qui est décrite par des intersections avec des droites [7].

Dans ce papier on se ramène, dans le cas d'une courbe C de genre 2 ayant beaucoup de composantes connexes réelles (c'est-à-dire au moins 2) au plan projectif où l'on décrit la loi de groupe sur $B = B_1 \times B_2$ en considérant l'intersection de C avec des coniques, comme sur la figure 1.

On étudie dans la première partie les courbes données par une équation du type $xy^2 = P(x)$ avec $\deg(P) = 4$, et on remarque que toute courbe réelle de genre 2 ayant

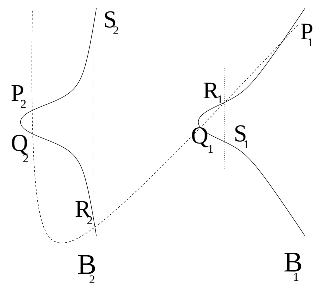

FIG. 1. La somme des points (P_1, P_2) et (Q_1, Q_2) sur C d'équation $xy^2 = P(x)$ (en trait plein) est $(P_1, P_2) + (Q_1, Q_2) = -(R_1, R_2) = (S_1, S_2)$, la conique intervenant dans la somme étant dessinée en pointillé.

beaucoup de composantes connexes réelles se plonge birationnellement dans $\mathbb{P}^2$ sur une courbe de ce type.

On donne ensuite la description géométrique de la loi de groupe sur B pour une courbe de genre 2 ayant beaucoup de composantes connexes réelles, d'abord dans un éclatement de $\mathbb{P}^2$ en un point, puis dans $\mathbb{P}^2$.

On décrit enfin la 2-torsion sur B de manière simple, tout en remarquant que la 3-torsion est plus difficile à cerner.

1. ETUDE DE LA COURBE $xy^2 = P(x)$

On donne des conditions pour qu'une courbe d'équation $xy^2 = P(x)$ soit irréductible et suffisamment lisse.

Proposition 1.1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec P séparable de degré 4 ayant exactement une racine strictement positive et ne s'annulant pas en 0. Alors la courbe C de $\mathbb{P}^2$ de degré 4 définie dans la partie affine par l'équation*

$$xy^2 = P(x)$$

est géométriquement irréductible, lisse en dehors du point $(0 : 1 : 0)$ qui est un point double ordinaire déployé sur $\mathbb{R}$, de genre 2, et possède 2 branches réelles passant par $(0 : 1 : 0)$. En particulier sa normalisation a beaucoup de composantes connexes réelles.

Démonstration. Le polynôme $XY^2 - P(X)$ de $\mathbb{C}[X, Y]$ est irréductible donc C est géométriquement irréductible. Le caractère lisse se montre par un calcul direct. En l'unique point à l'infini de C, c'est-à-dire $(0 : 1 : 0)$, le cône tangent projectif est donné par le polynôme homogène ZX, et donc $(0 : 1 : 0)$ est un point double ordinaire avec pour tangentes les droites réelles $\{Z = 0\}$ et $\{X = 0\}$.

Une étude du tableau de variation de la fonction à valeurs réelles $f(x) = \frac{P(x)}{x}$ montre que C possède 2 branches réelles passant par $(0 : 1 : 0)$, avec une branche située de chaque côté de la droite $\{X = 0\}$ dans la partie affine (voir la figure 1).

Enfin la formule du genre [1] dit que le genre de C est $\frac{(4-1)(4-2)}{2} - \frac{1}{2}2(2-1) = 2$. $\square$

Remarque. C a trois branches réelles si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{R}$. Si le coefficient dominant de P est positif, les conditions de signe sur les racines de P obligent la troisième branche éventuelle à se situer à gauche des deux autres.

Cette proposition admet la réciproque suivante.

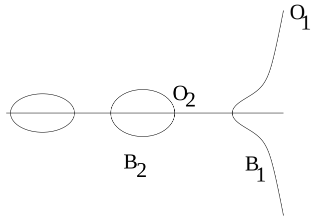

Fig. 2. C donnée par une équation du type $y^2 = R(x)$ avec $R \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(R) = 5$ séparable avec au moins 3 racines réelles.

Proposition 1.2. *Soit C une courbe algébrique réelle de genre 2, géométriquement irréductible, lisse, propre, ayant beaucoup de composantes connexes réelles. Il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 4 séparable avec exactement une racine strictement positive et ne s'annulant pas en 0, tel que C soit birationnellement isomorphe à la courbe de $\mathbb{P}^2$ définie dans la partie affine de $\mathbb{P}^2$ par l'équation $xy^2 = P(x)$.*

Démonstration. C est birationnellement isomorphe à une courbe de $\mathbb{P}^2$ donnée dans la partie affine par une équation de la forme $y^2 = R(x)$ avec $R \in \mathbb{R}[X], \deg(R) = 5$, R étant séparable avec au moins 3 racines réelles (voir la figure 2). On note $x_1 > x_2 > x_3$ les trois plus grandes racines réelles de R, et on suppose $x_2 = 0$. On pose $P(X) = \frac{R(X)}{X} \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme P est alors séparable de degré 4, a exactement une racine strictement positive et ne s'annule pas en 0. De plus l'application $(x, y) \longrightarrow (x, \frac{y}{x})$ est un isomorphisme birationnel de $\mathbb{P}^2$ d'inverse $(x, y) \longrightarrow (x, xy)$ qui échange les courbes d'équation $y^2 = R(x)$ et $xy^2 = P(x)$. □

On fixe désormais, et une fois pour toute dans ce papier, une courbe C de genre 2 géométriquement irréductible, lisse, propre, ayant beaucoup de composantes connexes réelles. Elle est birationnellement isomorphe à une courbe de $\mathbb{P}^2$ d'équation $y^2 = R(x)$, avec $R \in \mathbb{R}[X], \deg(R) = 5$, R séparable avec au moins 3 racines réelles comme dans la démonstration ci-dessus. On note O_2 le point de C de coordonnées $(0 : 0 : 1)$ et O_1 le point $(0 : 1 : 0)$. Les points O_i, pour $i \in \{1, 2\}$ sont des points de Weierstrass. On note B_i la composante connexe de $C(\mathbb{R})$ contenant O_i, pour $i \in \{1, 2\}$ (voir la figure 2).

Corollaire 1.3. *Le plongement birationnel $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{P}^2$ de la proposition précédente est le morphisme associé au système linéaire $|3O_1 + O_2|$.*

Démonstration. On montre que $\varphi^*(\{Z = 0\}) = 3O_1 + O_2$. Le support du diviseur $\varphi^*(\{Z = 0\})$ est inclus dans $\{O_1, O_2\}$ car $\varphi^{-1}(\{Z = 0\}) = \{O_1, O_2\}$. De plus la multiplicité d'intersection de $\{Z = 0\}$ et $\varphi(C)$ en $(0 : 1 : 0)$ est $\deg(\varphi(C)) = 4$ d'après le théorème de Bezout; φ étant un isomorphisme birationnel sur son image, le degré de $\varphi^*(\{Z = 0\})$ est aussi 4. Enfin $\{Z = 0\}$ coupe transversalement la branche $\varphi(B_2)$ en $(0 : 1 : 0)$, donc le coefficient de O_2 est 1. On en déduit que celui de O_1 est 3 puisque le degré de $\varphi^*(\{Z = 0\})$ est 4, et on trouve bien $\varphi^*(\{Z = 0\}) = 3O_1 + O_2$.

On conclut en remarquant que, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension du système linéaire $|3O_1 + O_2|$ est $\dim |3O_1 + O_2| = 4 - 2 = 2$. □

2. La courbe dans $\mathbb{P}^4$

Le diviseur $3O$, où $O = O_1 + O_2$, est non spécial et très ample pour des raisons de degré [5]. Le système linéaire $|3O|$ induit donc un plongement de C dans $\mathbb{P}^4$. On connaît alors [6] une description de la loi de groupe sur $Pic^o(C)^o$ via un isomorphisme avec le produit B des deux branches B_1 et B_2, chacune vue dans $\mathbb{P}^4$.

L'élément neutre est (O_1, O_2). On décrit géométriquement la loi de la manière suivante: pour $(P, Q) \in B^2$, il existe un unique hyperplan de $\mathbb{P}^4$ passant par les points $P_1, P_2, Q_1, Q_2, O_1, O_2$. Il coupe de plus C en deux autres points $R_1 \in B_1$ et $R_2 \in B_2$. La somme $P + Q$ est alors donnée par $P + Q = -R$. On trouve l'inverse d'un point P en prenant $Q = (O_1, O_2)$ dans cette description.

On va expliciter ce plongement de C dans $\mathbb{P}^4$ en choisissant une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\Gamma(C, \mathcal{O}(3O))$ des sections globales du faisceau inversible $\mathcal{O}(3O)$.

Soit $\{1, x_1, y_1\}$ une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\Gamma(C, \mathcal{O}(3O_1 + O_2))$ associé au plongement birationnel du corollaire 1.3. Posons $x_2 = \frac{1}{x_1}$ et $y_2 = y_1 x_2$.

Proposition 2.1. *$\{x_1, x_2, y_1, y_2, 1\}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\Gamma(C, \mathcal{O}(3O))$.*

Démonstration. On remarque que le diviseur de la fonction x_1 est $(x_1) = 2O_2 - 2O_1$, et donc celui de x_2 est $(x_2) = 2O_1 - 2O_2$. Par ailleurs le diviseur des pôles de y_1 est $(y_1)_\infty = 3O_1 + O_2$. On a donc $(y_2)_\infty = O_1 + 3O_2$. On constate alors que la famille $\{x_1, x_2, y_1, y_2, 1\}$ est libre pour des raisons de pôles. □

Le plongement $f : C \longrightarrow \mathbb{P}^4$ donné par le choix de cette base de $\Gamma(C, \mathcal{O}(3O))$ fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{P}^4 \arrow[dl, dotted, "{[X_1:Y_1:Z]}"] \\ \mathbb{P}^2 & \end{tikzcd}$$

où φ est le plongement birationnel de la section précédente.

Remarques.

1. Si J est l'involution hyperelliptique de C, alors $y_1 \circ J = -y_1$, J étant donnée dans $\mathbb{P}^2$ par la symétrie par rapport à l'axe $\{y = 0\}$.
2. Les fonctions x_1, x_2, y_1 et y_2 vérifient les relations suivantes: $x_1 x_2 = 1$, $y_2 = x_2 y_1$, $y_1 = x_1 y_2$ et donc $f(C)$ est incluse dans la sous-variété de $\mathbb{P}^4$ donnée par les équations homogènes $X_1 X_2 - Z^2 = 0$, $X_1 Y_2 - Y_1 Z = 0$, et $X_2 Y_1 - Y_2 Z = 0$.

3. LA COURBE DANS UN ÉCLATEMENT DE $\mathbb{P}^2$

Soit S la sous-variété de $\mathbb{P}^4$ définie par les équations $X_1 X_2 - Z^2 = 0$, $X_1 Y_2 - Y_1 Z = 0$, et $X_2 Y_1 - Y_2 Z = 0$.

Proposition 3.1. *S est isomorphe à un éclatement de $\mathbb{P}^2$ en un point*

Démonstration. Soit $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, de coordonnées $[(U : V), (X : Y : T)]$ homogènes en U, V d'une part et en X, Y, T d'autre part; l'éclatement $\pi : K \longrightarrow \mathbb{P}^2$ de $\mathbb{P}^2$ au point $(0 : 1 : 0)$ est donné par l'équation $UX - VT = 0$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, π étant la projection sur $\mathbb{P}^2$. Les applications rationnelles $g : S \longrightarrow K$ et $h : K \longrightarrow S$ définies par $g(X_1 : X_2 : Y_1 : Y_2 : Z) = [(Y_2 : Y_1), (X_1 : Y_1 : Z)]$ et $h((U : V), (X : Y : T)) = (V/U : U/V : Y/T : Y/X : 1)$ sont alors des morphismes inverses l'un de l'autre. □

On exprime maintenant ce plongement de K, éclatement de $\mathbb{P}^2$ en $(0 : 1 : 0)$, dans $\mathbb{P}^4$ en termes de système linéaire. Soient L_1 et L_2 les transformées strictes de $\{T = 0\}$ et $\{X = 0\}$ respectivement, tangentes en O_1 et O_2 à $\varphi(C)$ dans $\mathbb{P}^2$. Soit E le diviseur exceptionnel de K et $L = L_1 + L_2 + E$, $L \in Div(K)$. On pose $x = \frac{X}{T}$ et $y = \frac{Y}{T}$.

Proposition 3.2. *1. Les sections $x, \frac{1}{x}, y, \frac{y}{x}, 1$ sont des sections globales du faisceau inversible $\mathcal{O}(L)$.*

2. $\{x, \frac{1}{x}, y, \frac{y}{x}, 1\}$ constitue une base de $\Gamma(K, \mathcal{O}(L))$. En particulier le plongement $K \longrightarrow \mathbb{P}^4$ de la proposition précédente est induit par le système linéaire $|L|$.

Démonstration. On vérifie que $x, \frac{1}{x}, y, \frac{y}{x}, 1 \in \Gamma(K, \mathcal{O}(L))$ en notant que $(x) = L_2 - L_1$, $(y) = \pi^{-1}(\{Y = 0\}) - L_1 - E$, $(\frac{1}{x}) = L_1 - L_2$ et $(\frac{y}{x}) = \pi^{-1}(\{Y = 0\}) - L_2 - E$. De plus, pour des raisons de pôles, ces sections forment une famille libre de $\Gamma(K, \mathcal{O}(L))$. Or cet espace est de dimension 5 sur $\mathbb{R}$. En effet les éléments de $|L|$ correspondent aux courbes de degré 2 de $\mathbb{P}^2$ passant par le point $(0 : 1 : 0)$. Puisque les courbes de degré 2 dans $\mathbb{P}^2$ forment un espace de dimension 5, on a $\dim |L| = 4$ et donc $\dim_{\mathbb{R}} \Gamma(K, \mathcal{O}(L)) = 5$. Ainsi $\{x, \frac{1}{x}, y, \frac{y}{x}, 1\}$ forme bien une base de $\Gamma(K, \mathcal{O}(L))$. $\square$

Connaîssant la description de la loi de groupe sur B dans $\mathbb{P}^4$ on peut maintenant se ramener à K dans un premier temps puis à $\mathbb{P}^2$.

4. LOI DE GROUPE SUR B DANS $\mathbb{P}^2$

Il est classique que l'involution hyperelliptique induit sur la jacobienne la multiplication par -1.

Proposition 4.1. *L'inverse du point (P_1, P_2) est le point $(J(P_1), J(P_2))$.*

Démonstration. L'isomorphisme entre $B = B_1 \times B_2$ et $Pic^o(C)^o$ est donné par $(P_1, P_2) \longrightarrow [(P_1 - O_1) + (P_2 - O_2)]$ où $[D]$ désigne la classe d'équivalence linéaire du diviseur D (cf [6]). $\square$

Pour la somme, on donne d'abord le résultat en termes de système linéaire dans K. On note encore C la courbe plongée dans K et B_1, B_2 les branches réelles de C dans K contenant les points O_1 et O_2.

Proposition 4.2. *Pour tout $(P, Q) \in B^2$ il existe un unique diviseur $D \in |L|$ tel que $D \cdot C \geq P_1 + P_2 + Q_1 + Q_2$. Il existe de plus deux points R_1, R_2 sur B_1, B_2 respectivement tels qu'on ait l'égalité $D \cdot C = P_1 + P_2 + Q_1 + Q_2 + R_1 + R_2$. La somme $P + Q$ est alors donnée par $P + Q = -R$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 3.2. En effet le plongement de K dans $\mathbb{P}^4$ donne une bijection entre le système linéaire des sections hyperplanes de $\mathbb{P}^4$ et $|L|$. Il suffit alors de se reporter à la description géométrique de la loi de groupe sur B dans $\mathbb{P}^4$, donnée au début de la section 2. $\square$

On interprète enfin la somme sur le produit $\varphi(B_1) \times \varphi(B_2)$ de l'image des branches B_1 et B_2 de C dans $\mathbb{P}^2$.

Théorème 4.3. *Soient $P, Q \in \varphi(B_1) \times \varphi(B_2)$. Il existe une unique conique D de $\mathbb{P}^2$ qui passe par les points P_1, P_2, Q_1, Q_2 et $(0 : 1 : 0)$ de $\varphi(C)(\mathbb{R})$ (comptés avec multiplicité).*

Il existe de plus $R_1 \in \varphi(B_1)$ et $R_2 \in \varphi(B_2)$ uniquement déterminés par D tels que

$$D \cdot \varphi(C) = P_1 + P_2 + Q_1 + Q_2 + R_1 + R_2 + 2(0 : 1 : 0).$$

La somme $P + Q$ est donnée par la formule $P + Q = -(R_1, R_2)$.

Démonstration. C'est une conséquence de la description de la loi de groupe sur B pour C vue dans K. Pour compter la multiplicité d'intersection de $\varphi(C)$ et D en $(0 : 1 : 0)$, notons que tous les points d'intersection de $\varphi(C)$ et D sont réels. Du fait de l' isomorphisme entre la partie affine de $\mathbb{P}^2$ et la partie définie par l'équation $\{T = 1\}$ dans K, le point $(0 : 1 : 0)$, qui est l'unique point de $\varphi(C)$ à l'infini, concentre le reste de la multiplicité d'intersection de $\varphi(C)$ et D. $\square$

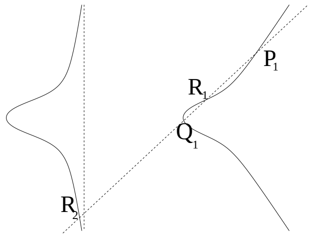

FIG. 3. $(P_1, O_2) + (Q_1, O_2) = (J(R_1), J(R_2))$ et $J(R_2) = O_2$ si et seulement si $Q_1 = J(P_1)$.

Remarque. Les sous-ensembles $\{O_1\} \times \varphi(B_2)$ et $\varphi(B_1) \times \{O_2\}$ ne sont pas des sous-groupes de $\varphi(B_1) \times \varphi(B_2)$. Ils ne sont même pas stables pour la somme (voir la figure 3).

5. 2 ET 3-TORSION SUR B

On garde les notations de la section précédente. On note $\widetilde{O_i}$ le second point de Weierstrass sur la branche $\varphi(B_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$ ($\widetilde{O_i}$ est le point d'intersection de $\varphi(B_i)$ avec l'axe $\{Y = 0\}$).

Proposition 5.1. *Les points de 2-torsion sur $\varphi(B_1) \times \varphi(B_2)$ sont les points $(\widetilde{O_1}, O_2)$, $(O_1, \widetilde{O_2})$ et $(\widetilde{O_1}, \widetilde{O_2})$.*

Démonstration. Si le point $P = (P_1, P_2)$ est un point de 2-torsion alors $P = -P$, d'où $(P_1, P_2) = (J(P_1), J(P_2))$ d'après la proposition 4.1. Les points fixes de J étant ses points de Weierstrass, il ne reste alors pour P que les trois possibilités annoncées, et le point (O_1, O_2). On vérifie aisément que ces trois points distincts de (O_1, O_2) sont de 2-torsion. $\square$

Remarque. On a trouvé toute la 2-torsion sur $Pic^o(C)^o$. En effet les points de 2-torsion sur $Pic^o(C)^o$ forment avec l'élément neutre (O_1, O_2) un groupe d'ordre 4 (cf [2], [3]).

Il est moins aisé de donner les points de 3-torsion, points qui constituent avec l'élément neutre (O_1, O_2) un groupe d'ordre 9 isomorphe à $(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}})^2$ d'après [2], [3]. On peut toutefois affirmer que si P_1 et P_2 sont des points d'inflexion de $\varphi(C)$ alors (P_1, P_2) n'est pas un point de 3-torsion de $\varphi(B_1) \times \varphi(B_2)$. Ce résultat est surprenant au sens où, dans le cas d'une courbe elliptique, les points de 3-torsion de la composante neutre des points réels de la jacobienne sont les points d'inflexion réels de la courbe [7]. Or ici il existe exactement neuf couples (P_1, P_2) avec P_1 et P_2 des points d'inflexion de $\varphi(C)$, soit autant que le cardinal du sous-groupe de 3-torsion!

Proposition 5.2. *Si $P = (P_1, P_2)$ est un point de 3-torsion de $\varphi(B_1) \times \varphi(B_2)$, alors P_1 et P_2 ne peuvent être simultanément des points d'inflexion de $\varphi(C)$.*

Démonstration. On suppose par exemple que le point P_1 est un point d'inflexion de $\varphi(C)$. Notons que le cas où P_2 est un point d'inflexion se traite de manière similaire. L'élément P du groupe B étant de 3-torsion, il existe d'après le théorème 4.3 une conique D telle que $\varphi(C) \cdot D = 3P_1 + 3P_2 + 2(0 : 1 : 0)$. Notons T_j la tangente à $\varphi(C)$ au point P_j pour $j \in \{1, 2\}$. On a $D \cdot T_1 \geq 3P_1$, donc D est dégénérée par le théorème de Bezout, et $D = T_1 + T_2$. On est alors dans un des deux cas suivants.

Soit $\varphi(C) \cdot T_1 = 3P_1 + (0 : 1 : 0)$ et nécessairement $P_1 = (0 : 1 : 0)$ car T_1 passe par le point singulier à l'infini de $\varphi(C)$. Mais alors $\varphi(C) \cdot T_2 = 3P_2 + (0 : 1 : 0)$, et de la même manière $P_2 = (0:1:0)$, d'où $P = (O_1, O_2)$ qui n'est pas un point de 3-torsion de B.

Soit $\varphi(C) \cdot T_1 = 3P_1 + P_2$ avec $P_2 \neq (0:1:0)$ et donc $\varphi(C) \cdot T_2 = 2P_2 + 2(0:1:0)$, et P_2 n'est pas un point d'inflexion de $\varphi(C)$ car l'ordre de contact de la tangente T_2 à $\varphi(C)$ en P_2 est strictement inférieur à 3. $\square$

Remerciement. Je remercie Johan Huisman pour m'avoir guidé tout au long de ce travail qui constitue mon mémoire de DEA effectué à l'université de Rennes 1.

Références

[1] Brieskorn, E., Knörrer, H.: *Plane algebraic curves*, Birkhäuser Verlag, 1986

[2] Ciliberto, C., Pedrini, C.: Real abelian varieties and real algebraic curves, *Lectures in real geometry*, F. Broglia (ed.), de Gruyter Exp. Math. 23, 167-256, (1996)

[3] Gross, B.H, Harris, J. : Real algebraic curves. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* t. 14, 157-182, (1981)

[4] Harnack, A.: Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven. *Math. Ann.* 10, 189-198, (1876)

[5] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math. 52, Springer Verlag, 1977

[6] Huisman, J.: On the neutral component of the Jacobian of a real algebraic curve having many components, à paraître dans *Indag. Math.*

[7] Silverman, J.H.: *The arithmetic of elliptic curves*, Grad. Texts in Math. 106, Springer Verlag, 1986

G. Fichou, Département de Mathématiques, Université d'Angers, 2 bd Lavoisier, 49045 Angers, France

E-mail address: fichou@tonton.univ-angers.fr