Exercice 2.6

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) Sans calcul, dire pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée.

(2) Montrer que f est orthogonal. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.

(3) Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.

(4) Déterminer l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. En donner une base, puis lui appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E_1.

(5) Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 satisfait $E_{-1} = (E_1)^{\perp}$. En utilisant l'équation caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.

(6) Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale.

CORRECTION

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) A est symétrique, donc f est un endomorphisme auto-adjoint. D'après le cours, f est donc diagonalisable en bases orthonormées.

(2) On calcule ${}^tAA = A^2$ On trouve :

$$\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 1+16+16+16 & \cdots \\ 4-20+8+8 & \cdots \\ -4-8+20-8 & \cdots \\ 4+8+8-20 & \cdots \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & \cdots \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix} = I_4 .$$

. A est symétrique donc $Sp\, A \subseteq \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in Sp\, A$ et $v \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$. Alors $Av = \lambda v$ et donc $\|Av\| = |\lambda|\, \|v\|$.

Or A est orthogonale donc

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle {}^tAAv, v \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

Ainsi $|\lambda|\|v\| = \|Av\| = \|v\|$.

Or $\|v\| \neq 0$ car $v \neq 0$, et donc $|\lambda| = 1$. Ainsi les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et -1. Il en est de même pour f.

(3) Notons $\mathrm{Sp}\, A = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$

Alors $\mathrm{tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$

Or $\mathrm{tr}\, A = \frac{1}{7}(-1+5+5+5) = 2$

On en déduit que 1 est valeur propre de multiplicité 3 et -1 est valeur propre de multiplicité 1.

Ainsi $\chi_f(X) = (X-1)^3(X+1)$

(4)
$$A - I = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -8 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

et on remarque que les lignes de $A-I$ sont proportionnelles.

Ainsi $E_1(A) = \ker(A-I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - z + t = 0 \right\}$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

On sait que $\dim E_1(A) = 3$ car 1 est de multiplicité 3 et A est diagonalisable. De plus (v_1, v_2, v_3) est libre car les vecteurs sont échelonnés. Ainsi (v_1, v_2, v_3) forme une base de $E_1(A)$.

On lui applique le procédé de Gram-Schmidt.

$\bullet\ w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} - \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/5\\2/5\\2\\0\end{pmatrix} = \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\5\\0\end{pmatrix}$

Choisissons $w_2' = \begin{pmatrix}2\\1\\5\\0\end{pmatrix}$. Alors

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle v_3, w_2'\rangle}{\langle w_2', w_2'\rangle} w_2'$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{30}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{5}-\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{15}\\ -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/15\\1/15\\-1/15\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-30\end{pmatrix}$$

La famille $\{v_1, w_2', w_3'\}$, où $w_3' = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-30\end{pmatrix}$, est orthogonale et engendre $E_1(A)$. On en déduit une base orthonormée :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\\1\\5\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{906}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\30\end{pmatrix} \right)$$

(5) On sait d'après le cours que les espaces propres d'un endomorphisme symétique sont orthogonaux deux à deux. Ici il n'y a que deux valeurs propres donc $E_{-1} = E_1^{\perp}$.

On en déduit $E_{-1} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$

(6) Posons

$$O = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{906} & 2/\sqrt{7} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{906} & 1/\sqrt{7} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{906} & -1/\sqrt{7} \\ 0 & 0 & 30/\sqrt{906} & 1/\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

Par construction $O \in O_4(\mathbb{R})$ et

$${}^tOAO = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de O forment donc la base cherchée.