Exercices autour de la correction de la seconde épreuve de CAPES de 2008

1. Arithmétique

Exercice 1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier avec $n \geq 2$. Montrer que n est un nombre premier si et seulement si n divise $\binom{n}{k}$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$.*

Exercice 1.2.
(1) *À l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers, calculer le nombre de diviseurs dans $\mathbb{N}$ d'un entier $n \geq 2$.*
(2) *Calculer la somme de ses diviseurs.*

2. Intégrale

Exercice 2.1. *Étudier la convergence de l'intégrale sur $[2, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^\alpha \ln^\beta x$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Exercice 2.2. *Montrer la convergence de l'intégrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dt$$

et la divergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \ln(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}) dt.$$

Pourtant

$$\ln(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}) dt \simeq_{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Commentaire?

Exercice 2.3. *Soit f une fonction localement intégrable sur $[0, +\infty[$.*
(1) *Montrer que si f admet une limite l en $+\infty$ et si l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est convergente, alors $l = 0$.*
(2) *Construire une fonction f dont l'intégrale sur $[0, +\infty[$ converge sans que f ne soit bornée.*

3. Séries

Exercice 3.1. *Étudier la convergence des séries de Bertrand.*

Exercice 3.2. *Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes:*
(1) $u_n = (-1)^n$,
(2) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$,

(3) $u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$,
(4) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Exercice 3.3. *Soit f une fonction positive et décroissante et telle que la série $\sum f(n)$ diverge. Notons (S_n) la suite des sommes partielles de cette série.*

(1) *Montrer que la suite de terme général*
$$S_n - \int_1^n f(t)dt$$
admet une limite.

(2) *Montrer que la suite de terme général $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ admet une limite (appelée constante d'Euler)*

Exercice 3.4. *Déterminer les réels a, b et c pour lesquels la série de terme général*
$$a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$$
converge, et calculer alors sa somme.

4. Séries entières

Exercice 4.1. *Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières $\sum a_n x^n$ suivantes:*

(1) $a_n = (-1)^n n$,
(2) $a_n = \frac{(-1)^k}{4k}$ *si* $n = 4k-1$, *et* $a_n = 0$ *sinon,*
(3) $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$.

Exercice 4.2. *Montrer que*
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 4.3. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum b_n x^n$?*