Exercices autour de la correction de la première épreuve 2005

1. Cauchy-Lipschitz

Exercice 1.1. *(Question IV-1 du problème) On démontre le résultat par l'absurde.*

(1) *Montrer qu'il existe une suite de zéros de f, formée d'éléments deux à deux distincts, qui converge. Soit l la limite. Que vaut $f(l)$?*
(2) *Construire une suite de zéros de f' convergeant vers l. Que vaut $f'(l)$?*
(3) *Conclure.*

Exercice 1.2. *(Question IV-4.(a) du problème)*

(1) *Montrer que r est continue.*
(2) *Montrer que f et f' ne peuvent s'annuler simultanément.*
(3) *Montrer que r est continûment dérivable.*

Exercice 1.3. *(Question V-1.(e) du problème) Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $I_p(x)$ la série entière ayant $\frac{1}{k!(p+k)!}$ pour coefficient d'ordre k.*

(1) *Donner le rayon de convergence de I_p.*
(2) *Quel est le signe de $I_p(x)$ pour $x \geq 0$?*
(3) *Vérifier que I_p est solution de l'équation différentielle*

$$(x^{p+1}y')' = x^p y.$$

(4) *Démontrer que I_p et I'_p ne peuvent s'annuler simultanément.*

Exercice 1.4. (1) *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|^{1/2}$ est solution de l'équation différentielle*

$$y' = \frac{3}{2}|y|^{1/3}.$$

Que vaut f en 0?
(2) *Donner une autre solution vérifiant $y(0) = 0$.*
(3) *Conclure.*

Exercice 1.5. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note (E_α) l'équation différentielle*

$$(E_\alpha)\ \alpha y - (2x+1)y' - (x^2+x)y'' = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1) *Déterminer la valeur de α, qu'on notera α_n, telle que (E_α) possède au moins une solution polynomiale à coefficients réels et de degré exactement égal à n.*
(2) *Montrer que (E_{α_n}) possède une unique solution polynomiale, notée L_n, à coefficients réels de degré exactement égal à n et telle que $L_n(0) = 1$.*

(3) *Expliciter les coefficients de L_n à l'aide de coefficients binomiaux (on pourra remarquer avec profit que $(a(a+1) - b(b+1) = (a-b)(a+b+1))$.*

2. Intégration

Exercice 2.1. *(Question II-6.(a), III-1.(a), V-3.(a) du problème)*

(1) *Montrer qu'une fonction continue strictement positive admet une intégrale strictement positive sur un segment non réduit à un point.*
(2) *Soit f une fonction intégrable positive sur un segment non réduit à un point. On suppose l'intégrale de f nulle sur ce segment. En déduire que f prend la valeur 0 en tout point du segment où elle est continue.*

Exercice 2.2. *(Question V-3.(a) du problème)*

(1) *Rappeler l'énoncé du théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres sur un segment.*
(2) *En déduire que ϕ_n est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.*
(3) *En utilisant l'exercice précédent, montrer que $\phi_n(0)$ est non nul.*

Exercice 2.3. *(Préliminaire du problème) Démontrer la formule d'intégrations par parties itérée.*

Exercice 2.4. *Montrer qu'une fonction f à valeurs réelles continue sur $\mathbb{R}$ admet une primitive.*

3. Borne supérieure

Exercice 3.1. *Rappeler la définition de la borne supérieure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Sous quelles conditions une telle borne existe?*

Exercice 3.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $E = \{x \in [a,b] | f(x) = 0\}$. Montrer que si E n'est pas vide, alors $\sup E$ est un élément de E.*

Exercice 3.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. L'ensemble des valeurs de f admet-il une borne supérieure, et si oui est-elle atteinte, dans les cas suivant:*

(1) *f est continue,*
(2) *I est un segment,*
(3) *f est bornée,*
(4) *f est continue et admet des limites aux bornes de I,*
(5) *f est périodique,*
(6) *f est continue périodique*
(7) *f est périodique et bornée*