Exercices autour de la correction de la première épreuve 1992

1. Équations et inéquations en sinus, cosinus,...

Exercice 1.1. *Résoudre les équations suivantes, où $x \in \mathbb{R}$:*

(1) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.
(2) $\cos x + \sin x = 1$.
(3) $\cos x + \sin x = 1,5$.

Exercice 1.2. *Résoudre l'équation* $\sin(\arctan x) = \tan(2\arctan x)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.3. *Déterminer les points d'inflexion du graphe de la fonction* $x \mapsto 2\sin x + \frac{\sin 2x}{2}$ *définie sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 1.4. *Déterminer les extrema de la fonction* $x \mapsto \sin^2 x + \sin 2x$ *définie sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 1.5. *Résoudre les inéquations suivantes:*

(1) $\sin x > \cos x$.
(2) $\sin x + \cos x \geq 1/2$.

2. Étude de fonctions

Exercice 2.1. *Étudier la continuité de la fonction* $x \mapsto \frac{x \sin \pi x}{E(x)}$ *définie sur* $[1, +\infty[$ *(où* E *désigne la partie entière). Tracer son graphe.*

Exercice 2.2. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \cos x + 1/3 \cos 3x + 1/5 \cos 5x + 1/7 \cos 7x.$$

(1) *Déterminer la période de* f *et les symétries éventuelles de son graphe.*
(2) *Vérifier que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, sa dérivée vérifiant* $f'(x) = -\frac{\sin^2 4x}{\sin x}$.
(3) *Tracer le graphe de* f *sur* $[-2\pi, 2\pi]$.

3. Théorème de Gauss et irrationalité de quelques réels

Exercice 3.1. *Démontrer l'irrationnalité de* $\sqrt{2}$ *et* $\sqrt{5}$*.*

Exercice 3.2. *(Question II.1.a du problème) On souhaite montrer l'irrationalité de* $\frac{\ln 2}{\ln 3}$*. Supposons qu'il existe* $p \in \mathbb{N}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$*.*

(1) *Montrer qu'alors* $2^q = 3^p$*.*
(2) *Conclure.*

4. Logique

Exercice 4.1. *Écrire la négation des propositions suivantes:*

(1) P *ou* Q
(2) P *et* Q
(3) $P \Rightarrow Q$
(4) $\exists x, \forall y, \; f(x,y) = a$
(5) $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, \forall y, |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
(6) $\sin(x \ln 2)$ *et* $\sin(x \ln 3)$ *sont non nuls.*

5. Continuité et extremum

Exercice 5.1. *(Question II.3.e du problème) Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $]a, b[$ *ayant* $+\infty$ *pour limite en* a *et* b*. Montrer que* f *admet un minimum sur* $]a, b[$*.*

Exercice 5.2. *Soit* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et ayant une limite finie en* $+\infty$*. Montrer que f est bornée sur* $[0, +\infty[$ *et atteint au moins une de ses bornes.*