Exercices autour de la correction de l'épreuve CAPLP 2006

1. Nombres complexes et géométrie

Exercice 1.1. *Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que*
(1) $\arg \frac{i-z}{1-z} = 0 \mod \pi$
(2) $\arg \frac{z-1-i}{z-5-4i} = \pi/2 \mod \pi$

Exercice 1.2. *Les points A et B ont pour affixes respectives $2+i$ et $3-2i$. Déterminer l'affixe d'un point C tel le triangle ABC soit équilatéral.*

Exercice 1.3. *Paul trouve un parchemin dans une bouteille jetée à la mer. Voici ce qui est écrit :*
Rends-toi sur l'île du pendu, tu y trouveras une potence. À partir de la potence, dirige-toi vers l'unique chêne de l'île en comptant tes pas. Au chêne, pivote d'un quart de tour vers ta droite et marche le même nombre de pas. Plante un piquet en terre. À partir de la potence, dirige-toi ensuite vers la vieille barque éventrée en comptant tes pas. Arrivé à la barque, pivote d'un quart de tour vers ta gauche et marche le même nombre de pas. Plante à nouveau un piquet en terre. Creuse à mi-chemin entre les deux piquets : le trésor est là.
Paul se rend sur l'île du pendu, y trouve le chêne et la vieille barque éventrée, mais, à son grand désespoir, il n'y a plus aucune trace de la potence. Il part de l'endroit où il se trouve et suit à la lettre les consignes précédentes et trouve le trésor.
A-t-il réellement eu de la chance?

Exercice 1.4. *Prouvez que trois points distincts d'affixes a, b et c sont sur une même droite si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.*

Exercice 1.5. (1) *Donner l'écriture complexe d'une rotation.*
(2) *Démontrer que la composition de deux rotations d'angle α et β, avec $\alpha+\beta \neq 0 \mod 2\pi$, est une rotation.*

2. Probabilités

Exercice 2.1. *Une urne contient deux boules vertes et trois boules bleues. On tire successivement deux boules sans remise. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit verte?*

Exercice 2.2. *On lance deux dés équilibrés, puis on totalise les points marqués. Quelle est la probabilité d'avoir un total supérieur ou égal à huit?*
Au bout de 20 lancers, quelle est la probabilité d'avoir obtenu dix fois exactement un total supérieur ou égal à huit?

3. Récurrences

Exercice 3.1. *Soit P_n la propriété*

$$P_n : 3^{2n+4} - 2^n \text{ est un multiple de } 7.$$

Montrer que si P_n est vraie pour un certain n, alors P_{n+1} est vraie. Conclusion?

Exercice 3.2. *Soit u_n la suite définie par $u_n = \frac{n^2-n+1}{n^2}$. Montrer que $u_1 \geq 1$. Montrer que si $u_n \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq 1$. Conclusion?*

Exercice 3.3. *Soient $0 < a < b$ des nombres réels. On définit des suites (a_n) et (b_n) de nombres réels par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. Montrer que (a_n) et (b_n) forment un couple de suites adjacentes.*

Exercice 3.4. *Montrer que tout entier supérieur ou égal à deux possède un diviseur premier. En déduire que tout entier s'écrit comme produit d'un nombre fini de nombres premiers.*

Exercice 3.5. *Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 2$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 2^n$.*

4. Équations différentielles

Exercice 4.1. *Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' - 4y = 0$ avec conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 4$.*

Exercice 4.2. *Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ avec conditions initiales $y(1) = 0$ et $y'(0) = 1$*

Exercice 4.3. *Résoudre l'équation différentielle $4y'' + 4y' + 65y = 0$ avec conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1/2$*

Exercice 4.4.

(1) *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|^{1/2}$ est solution de l'équation différentielle*

$$y' = \frac{3}{2}|y|^{1/3}.$$

Que vaut f en 0?

(2) *Donner une autre solution vérifiant $y(0) = 0$.*

(3) *Conclure.*

Exercice 4.5. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note (E_α) l'équation différentielle*

$$(E_\alpha) \ \alpha y - (2x+1)y' - (x^2+x)y'' = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1) *Déterminer la valeur de α, qu'on notera α_n, telle que (E_α) possède au moins une solution polynomiale à coefficients réels et de degré exactement égal à n.*

(2) *Montrer que (E_{α_n}) possède une unique solution polynomiale, notée L_n, à coefficients réels de degré exactement égal à n et telle que $L_n(0) = 1$.*

(3) *Expliciter les coefficients de L_n à l'aide de coefficients binomiaux (on pourra remarquer avec profit que $(a(a+1) - b(b+1) = (a-b)(a+b+1))$.*